Fyrirlestraröð fyrir nýnema VoN - Föll

Þorsteinn Hjörtur Jónsson og Arnbjörg Soffía Árnadóttir

7. ágúst 2015

1 Inngangur

Þessar nótur eru skrifaðar með nýnema Verk- og Náttúrufræðisviðs í Háskóla Íslands í huga. Nóturnar eru hugsaðar sem einföld upprifjun á mengjum og vörpunum, raunföllum sér í lagi.
Nótunum fylgir glærusafn skrifað í beamer pakkanum. Það er ósk höfundar að þetta efni muni nýtast sem flestum.
Hver sá sem vill nota nóturnar til kennslu en vill breyta textanum á einhvern hátt er frjálst að gera sitt eigið afrit. Það má senda tölvupóst á veffangið thor.h.jonsson@gmail.com til að fá .tex skrá.

2 Stiklað á stóru um mengi

Þessi texti inniheldur algjör grundvallaratriði um mengi sem við munum þurfa á að halda til að tala um föll. Það er mjög mikilvægt að gera sér grein fyrir því að föll eru skilgreind út frá mengjum. Hefjum leikinn á því að skilgreina mengi.

Skilgreining. Mengi *Mengi* er hvers konar safn ólíkra "hluta".

Þeir "hlutir"sem mengi inniheldur eru kallaðir *stök* þess. Ef A er mengi og x er stak í menginu A, þá ritum við

$$x \in A$$

Aftur á móti ef x er ekki eitt af stökum A, þá ritum við

$$x \notin A.$$

Takið eftir því að hugtakið mengi er ansi víðfeðmt. Við gætum talað um mengi bóka á plánetunni Jörð, mengi bíla á bílaplani eða mengi talna á talnabili. Mikilvægustu mengin í stærðfræðigreiningu eru talnamengi, mengi sem innihalda ekkert annað en tölur. Mengi ákvarðast algjörlega af stökum sínum. Það er að segja tvö mengi eru jafngild ef og aðeins ef[1] þau innihalda sömu stök. Við segjum að mengið A sé hlutmengi í menginu B ef öll stök í menginu A eru líka í menginu B.

Dæmi: Látum A vera bilið frá 0 upp í óendanlegt, látum B vera bilið frá 1 upp í óendanlegt.

[1]Orðasambandið „ef og aðeins ef" (eff) er mikilvægt í stærðfræði. Það hefur sömu merkingu og „þá og því aðeins að" (þ.þ.a.a), þ.e. það gefur nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði.

Bilið B er hlutmengi í bilinu A þar sem öll stökin í menginu B eru líka í menginu A.

Nokkur mengi sem er nauðsynlegt að þekkja eru:

1. Mengi náttúrlegra talna = $\mathbb{N} = \{(0), 1, 2, 3, \ldots\}$
2. Mengi heilla talna = $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$
3. Mengi ræðra talna = $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ og } q \neq 0\}$
4. Mengi rauntalna = $\mathbb{R}$
5. Mengi tvinntalna = $\mathbb{C}$

3 Samband mengja - Varpanir

Ef við erum með tvö mengi, A og B, hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja? Ein leið væri að skilgreina tengsl á milli staka mengjanna.

Vörpun er samband tveggja mengja, **formengis** og **bakmengis**, sem tengir sérhvert stak í skilgreiningarmenginu nákvæmlega einu staki í bakmenginu. Ef f er vörpun með formengi A og bakmengi B skrifum við

$$f : A \to B$$

til marks um það.

Athugum að sérhvert stak í A varpast í eitthvert stak í B, en þessu er ekki öfugt farið, þ.e. við getum haft stök í B sem engin stök í A varpast í með vörpuninni f. Athugum einnig að sérhvert stak í A getur einungis varpast í eitt stak í B, en hins vegar geta nokkur mismunandi stök í A varpast í sama stakið í B.

Dæmi um varpanir:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad f(z) = (x, y)$, þar sem $z = x + iy$
- $f : \{0\} \to \mathbb{N}, \quad f(0) = 0$
- $f : [0, \pi] \to [-1, 1], \quad f(x) = \cos(x)$

Föll

Varpanir sem hafa talnamengi fyrir bakmengi kallast *föll* og eru afar mikilvæg í stærðfræðigreiningu.

Þegar talað er um *raunföll* er átt við föll sem hafa bakmengi og formengi sem eru hlutmengi í $\mathbb{R}$. Ef við skoðum aftur varpanirnar hér að ofan, þá eru fyrsta, þrjðja og fjórða vörpunin raunföll.

4 Eintæk og átæk föll

Skilgreining. Látum $f : A \to B$ vera fall. *Myndmengi* fallsins f er mengi allra staka $y \in B$ þ.a. til sé stak $x \in A$ sem uppfyllir $f(x) = y$.
Við táknum myndmengið með $f(A)$.

Skilgreining. Fall $f : A \to B$ er *eintækt* (one-one, injective) ef

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Fall $f : A \to B$ er *átækt* (onto, surjective) ef B er myndmengi f, þ.e. ef

$$f(A) = B$$

.

Fall $f : D \to R$ er *gagntækt* (bijective) ef það er bæði eintækt og átækt.

Athugum að eintækni, átækni og gagntækni falla ákvarðast algerlega af formengjum og bakmengjum fallanna. Við getum til dæmis tekið hvaða fall sem er og gert það átækt með því að einskorða það við myndmengi sitt, þ.e. við skoðum fallið $f : A \to f(A)$ í stað $f : A \to B$.

Á sama hátt er oft hægt að einskorða fall við eitthvert hlutmengi í formenginu til þess að gera það eintækt, en þetta er yfirleitt ekki æskilegt, þar sem þetta getur breytt mikilvægum eiginleikum fallsins. Sem dæmi má nefna kósínusfallið sem er alls ekki eintækt, en er lotubundið. Ef við einskorðum það við bilið $[0, \pi]$ þá verður það eintækt, en ekki lengur lotubundið.

Dæmi um eintæk föll

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$
- $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \cos(x)$

Hins vegar eru föllin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekki eintækt.

Dæmi um átæk föll

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$
- $h : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad h(x) = \cos(x)$

Hins vegar eru föllin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekki átæk.

Dæmi um gagntæk föll

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad g(x) = e^x$

5 Andhverfur falla

Látum f vera fall með mengið X sem formengi og mengið Y sem bakmengi.

Við segjum að f sé andhverfanlegt ef til er fall g með formengi Y og bakmengi X þ.a.

$$f(x) = y \ \underline{\text{eff}} \ g(y) = x$$

Ef slíkt fall g er til þá kallast það *andhverfa* fallsins f, táknað f^{-1}, og er ótvírætt ákvarðað, þ.e. ef til er annað fall h sem er andhverfa f, þá er $h = g$.

Athugum að fall er andhverfanlegt <u>eff</u> það er gagntækt.

Dæmi um andhverfu falls

Látum $f(x) = (2x+8)^3$ og finnum andhverfu f. Ein leið til að finna andhverfu falls, ef hún er til, er að leysa jöfnuna $y = f(x)$ fyrir x. Þá fæst:

$$y = (2x+8)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = 2x+8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} - 8 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{y}-8}{2} = x$$

svo að andhverfa fallsins f er fallið g þ.a.

$$g(y) = \frac{\sqrt[3]{y}-8}{2}.$$

6 Margliður

Margliður eru þau föll sem við þekkjum hvað best og þær eru að mörgu leyti þægilegar að vinna með.

Margliða er fall af gerðinni:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

þar sem n er endanlegt $a_i \in \mathbb{R}, \forall i$ og $a_n \neq 0$.
Talan n kallast stig margliðunnar og a_i stuðlar hennar.

Skoðum lægstu þrjú stig margliða:

<u>$n = 0$:</u>

Núllta stigs margliða er á forminu $f(x) = a$ þar sem $a \in \mathbb{R}$. Hún er einnig kölluð fastafall og graf hennar er lárétt lína (samsíða x-ás). Skurðpunktur línunnar við y-ás er a en hún hefur engan skurðpunkt við x-ás nema ef $a = 0$.

<u>$n = 1$:</u>

Fyrsta stigs margliða er á forminu $f(x) = ax + b$ þar sem $a, b \in \mathbb{R}$. Graf hennar er lína. Skurðpunktur þessarar línu við y-ásinn er b, hallatala hennar er a og skurðpunktur við x-ásinn er $-b/a$

<u>$n = 2$:</u>

Annars stigs margliða er á forminu $f(x) = ax^2 + bx + c$ þar sem $a, b, c \in \mathbb{R}$. Graf hennar er fleygbogi. Skurðpunktur fleygbogans við y-ásinn er c, en til þess að finna skurðpunkta hans við x-ásinn þurfum við að leysa jöfnuna:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Þessi jafna getur haft tvær, eina eða enga rauntölulausn, allt eftir því hvort liðurinn $b^2 - 4ac$ sé jákvæður, núll eða neikvæður.[2]

[2] Jafnan hefur þó alltaf tvinntölulausn.

Dæmi um margliður:

- $f(x) = 3x + 9$
- $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 30x + 14$
- $f(x) = x^{137} - 1$

7 Vaxandi og minnkandi föll

Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall. Fallið f er sagt vera *vaxandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ef ströng ójafna gildir $(f(x_1) < f(x_2))$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* vaxandi.

Fallið f er sagt vera *minnkandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ef ströng ójafna gildir $(f(x_1) > f(x_2))$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* minnkandi.

Fall sem er annað hvort vaxandi eða minnkandi er sagt vera *einhalla.* Ef fallið er stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi er það sagt vera *stranglega* einhalla.

8 Jafnstæð og oddstæð föll

Skilgreining. Fall $f : A \to B$ er

- *jafnstætt* (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in A$
- *oddstætt* (odd) ef $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in A$

(hér er $A \subseteq \mathbb{R}$)

Dæmi um jafnstæð föll

- $f(x) = x^2$

Höfum $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

- $g(x) = \cos(x)$

Graf jafnstæðs falls er **samhverft** um y-ás.

Dæmi um oddstæð föll

- $f(x) = 2x$, fyrir $x \in \mathbb{R}$

Höfum $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$

- $f(x) = \sin(x)$

Graf oddstæðs falls er **samhverft** um núllpunktinn.

9 Veldisvísisföll og lograr

Veldisvísis föll og lograr eru ákaflega mikilvæg föll í í ýmsum vísindagreinum, t.a.m. eðlisfræði, efnafræði, líffræði, verkfræði og tölvunarfræði.

Skilgreining. Fall af gerðinni $f(x) = a^x$, þar sem $a \in \mathbb{R}$, kallast *veldisvísisfall* með grunntölu a.

Skilgreining. Fall sem er andhverfa veldisvísisfalls með grunntölu a, kallast *lografall* (eða logri) með grunntölu a og er táknað með $\log_a(x)$.

Með öðrum orðum, þá er logri tölunnar x með grunntölu a það veldi b sem þarf að hefja a í til þess að fá út x, þ.e. sú tala b sem uppfyllir: $a^b = x$. Þar sem föllin eru andhverfur höfum við:

$$\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x.$$

Náttúrulega veldisvísisfallið og náttúrulegi logrinn

Skilgreining. Talan

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \simeq 2.718281828$$

nefnist tala Eulers.
Fallið $exp(x) = e^x$ kallast *náttúrulega veldisvísisfallið.*

Skilgreining. Andhverfa náttúrulega veldisvísisfallsins kallast náttúrulegi logrinn og er táknaður með $\ln(x)$.

10 Hornaföll

Grunnhornaföllin eru sínus og kósínus: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ef við látum $\mathbf{v}$ vera vigur af lengd 1 sem myndar hornið θ við jákvæða hluta x-ássins, þá er $\cos(\theta)$ skilgreint sem ofanvarp $\mathbf{v}$ á x-ásinn og $\sin(\theta)$ sem ofanvarp $\mathbf{v}$ á y-ásinn.

Fleiri hornaföll
Notum nú sínus og kósínus til þess að skilgreina fleiri hornaföll:

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)} \qquad \csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}.$$

Hornafallareglur

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Með þessum þremur meginreglum má svo leiða út nokkrar í viðbót:

- $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$.

11 Samskeyting falla

Tökum tvö föll $f : A \to B$ og $g : C \to D$. Gerum ráð fyrir að

$$g(C) \subset A$$

(þ.e. öll $g(x)$ eru í formengi f).

Skilgreinum samsetta (composite) fallið $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Dæmi

Látum $f(x) = 3x^2 \quad$ og $g(x) = 2x + 4$. Skoðum $f \circ g$ og $g \circ f$. Höfum:

$$f \circ g = f(g(x)) = f(2x+4) = 3(2x+4)^2$$

$$= 3(4x^2 + 16x + 16) = 12x^2 + 48x + 48.$$

Á sama hátt fæst:

$$g \circ f = g(f(x)) = g(3x^2)$$
$$= 2(3x^2) + 4 = 6x^2 + 4.$$

Dæmi

Látum $(g(x) = \sin x$ og $f(x) = x^2$. Skoðum $f \circ g$ og $g \circ f$. Höfum:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \sin(x^2).$$

Á sama hátt fæst:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sin x) = \sin^2 x.$$