FÖLL

Þorsteinn Hjörtur Jónsson

6. ágúst 2015

Verkfræði- og raunvísindasvið Háskóla Íslands

EFNISYFIRLIT

INNGANGUR

INNGANGUR

Þessar glærur og tilheyrandi nótur voru samdar fyrir fyrirlestur sem haldinn var fyrir nýnema Verkfræði- og raunvísindasviðs Háskóla Íslands þann 7. ágúst 2015. Efni fyrirlestursins eru nokkur grunnhugtök í stærðfræði, mengi varpanir og raunföll, sem fjallað er um með hæfilegri stærðfræðilegri rökfestu. Lögð er áhersla á að byggja upp innsæi og taka lýsandi dæmi.

Allar ábendingar um það sem betur mætti fara eru vel þegnar. Vinsamlegast sendið þær til thj92@hi.is.

Skilgreining: *Mengi* er hvers konar safn ólíkra ”hluta”.

Skilgreining: *Mengi* er hvers konar safn ólíkra ”hluta”.

Þeir ”hlutir”sem mengi inniheldur eru kallaðir *stök* þess.

Skilgreining: *Mengi* er hvers konar safn ólíkra ”hluta”.

Þeir ”hlutir”sem mengi inniheldur eru kallaðir *stök* þess.

Ef A er mengi og x er stak í menginu A, þá ritum við

$$x \in A$$

Skilgreining: *Mengi* er hvers konar safn ólíkra ”hluta”.

Þeir ”hlutir”sem mengi inniheldur eru kallaðir *stök* þess.

Ef A er mengi og x er stak í menginu A, þá ritum við

$$x \in A$$

Aftur á móti ef x er ekki eitt af stökum A, þá ritum við

$$x \notin A.$$

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

- $\mathbb{N}:$ Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}:$ Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... -1, 0, 1, 2, ...\}$

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}$: Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... - 1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q}$: Mengi ræðra talna („almenn brot“)
  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$: Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{\ldots -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$: Mengi ræðra talna („almenn brot“)
  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathbb{R}$: Mengi rauntalna
  $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}$: Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... - 1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q}$: Mengi ræðra talna („almenn brot“)
  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathbb{R}$: Mengi rauntalna
  $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$
- $\mathbb{C}$: Mengi tvinntalna

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}$: Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... - 1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q}$: Mengi ræðra talna („almenn brot“)
  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathbb{R}$: Mengi rauntalna
  $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$
- $\mathbb{C}$: Mengi tvinntalna

Ef við erum með tvö mengi, A og B hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja?

Ef við erum með tvö mengi, A og B hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja?

Ein leið væri að skilgreina tengsl á milli staka mengjanna.

Ef við erum með tvö mengi, *A* og *B* hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja?

Ein leið væri að skilgreina tengsl á milli staka mengjanna.

Vörpun er samband tveggja mengja, formengis og bakmengis , sem tengir sérhvert stak í formenginu nákvæmlega einu staki í bakmenginu.

Ef við erum með tvö mengi, A og B hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja?

Ein leið væri að skilgreina tengsl á milli staka mengjanna.

Vörpun er samband tveggja mengja, formengis og bakmengis , sem tengir sérhvert stak í formenginu nákvæmlega einu staki í bakmenginu.

Ef f er vörpun með formengi A og bakmengi B skrifum við

$$f : A \to B$$

Myndmengi vörpunarinnar f er mengi allra staka $y \in B$ þ.a. til sé stak $x \in A$ sem uppfyllir $f(x) = y$.

Við táknum myndmengið með $f(A)$.

Föll

Varpanir sem hafa talnamengi fyrir bakmengi kallast *föll* og eru afar mikilvæg í stærðfræðigreiningu.

Föll

Varpanir sem hafa talnamengi fyrir bakmengi kallast *föll* og eru afar mikilvæg í stærðfræðigreiningu.

Þegar talað er um *raunföll* er átt við föll með bakmengi og formengi sem eru hlutmengi í $\mathbb{R}$.

1. Látum $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2\}$ vera mengi. Hver eftirtalinna eru varpanir?
    1.1 $f : A \to B$ þar sem $b_1 = f(a_1)$ og $b_2 = f(a_2) = f(a_3)$
    1.2 $f : A \to B$ þar sem $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$ og $f(a_2)$ er ekki til
    1.3 $f : B \to A$ þar sem $a_1 = f(b_1), a_2 = f(b_2)$ og $a_3 = f(b_2)$
    1.4 $f : B \to A$ þar sem $a_1 = f(b_1)$ og $a_3 = f(b_2)$
2. Hver eru formengi, bakmengi og myndmangi eftirfarandi falla?
    2.1 Fallið f í (a)-lið í síðasta dæmi
    2.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$
    2.3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2$

Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$

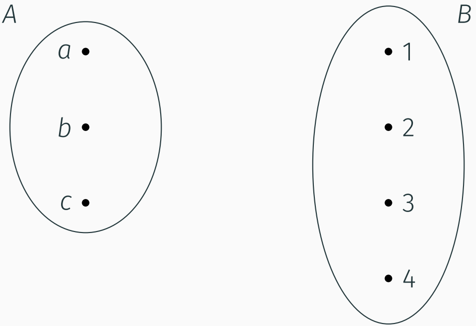
EINTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$



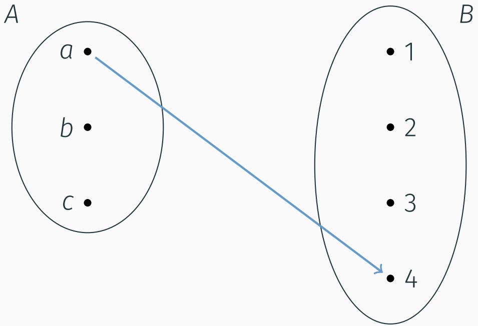
EINTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$



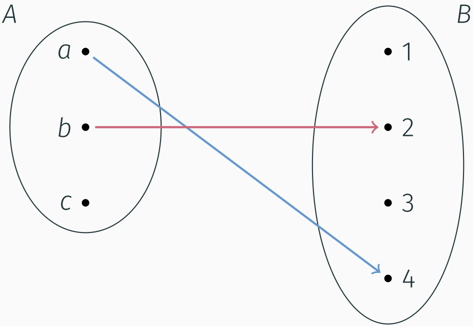
EINTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$

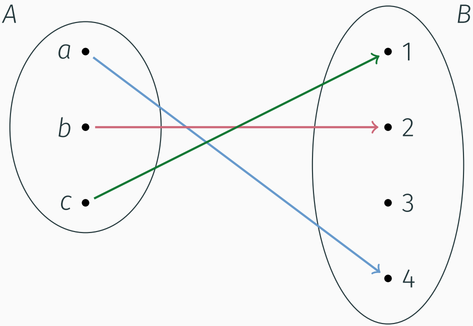


Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$



ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

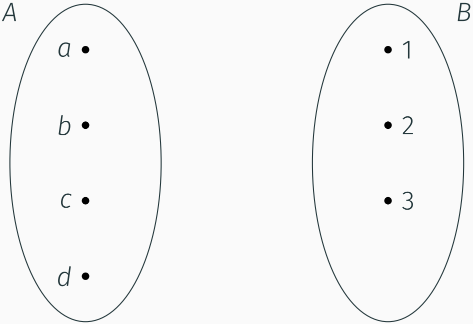
.

ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

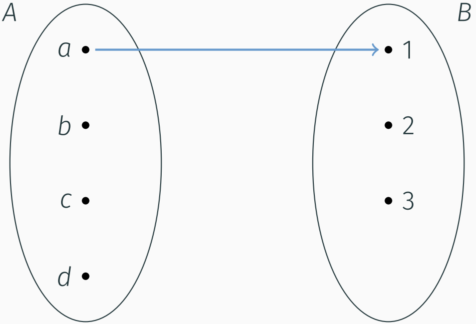
.



Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

.

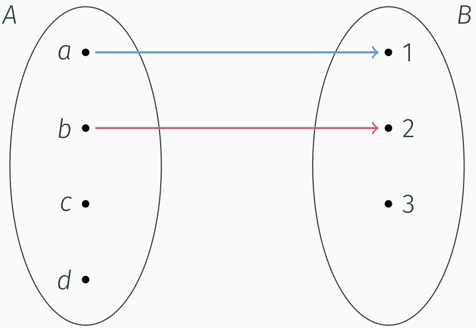


ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

.

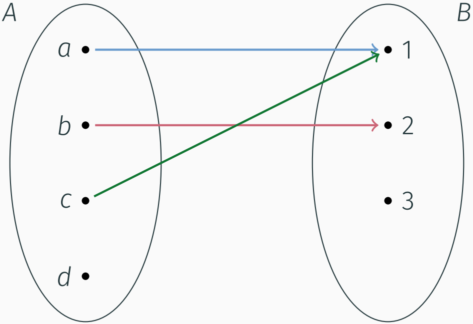


ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

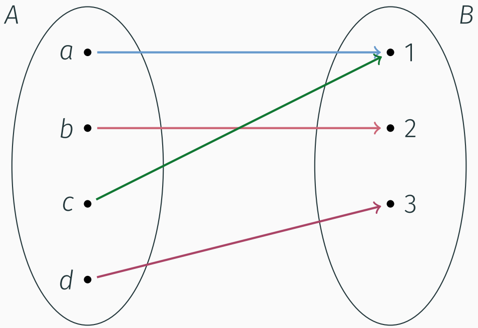
.



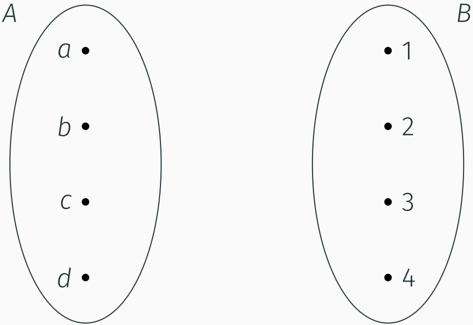
Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

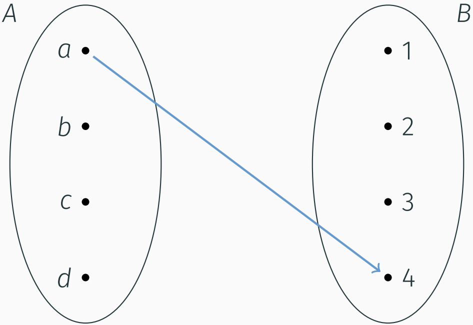
.



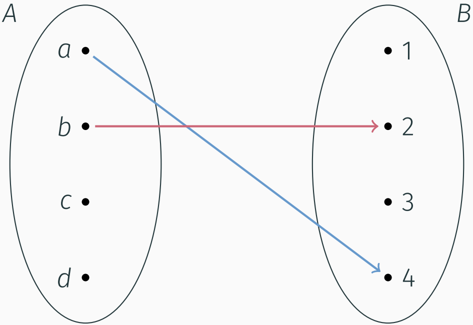
Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



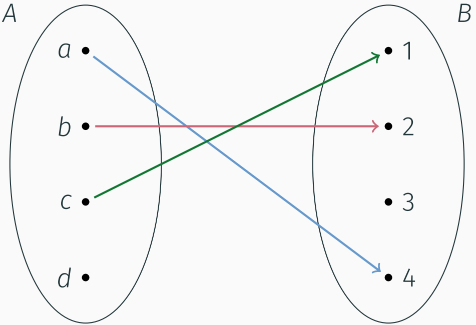
Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



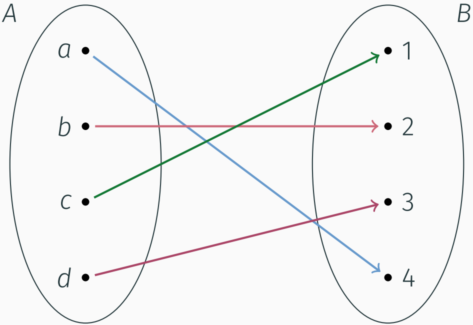
Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.

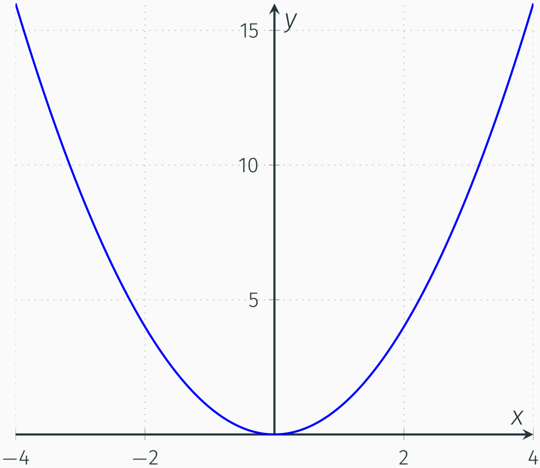


Er fallið eintækt? Er fallið átækt?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{með} \quad f(x) = x^2$$

Er fallið eintækt? Er fallið átækt?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{með} \quad f(x) = x^2$$



Segið til um hvort eftirfarandi föll séu eintæk, átæk, gagntæk eða ekkert af þessu:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -11x$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -4$
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 1$

Látum f vera fall með mengið A sem formengi og mengið B sem bakmengi.

Látum f vera fall með mengið A sem formengi og mengið B sem bakmengi.

Við segjum að f sé andhverfanlegt ef til er fall g með formengi B og bakmengi A þ.a.

$$f(x) = y \text{ ef og aðeins ef } g(y) = x$$

Látum f vera fall með mengið A sem formengi og mengið B sem bakmengi.

Við segjum að f sé andhverfanlegt ef til er fall g með formengi B og bakmengi A þ.a.

$$f(x) = y \text{ ef og aðeins ef } g(y) = x$$

Ef slíkt fall g er til þá er það ótvírætt ákvarðað.

Látum f vera fall með mengið A sem formengi og mengið B sem bakmengi.

Við segjum að f sé andhverfanlegt ef til er fall g með formengi B og bakmengi A þ.a.

$$f(x) = y \text{ ef og aðeins ef } g(y) = x$$

Ef slíkt fall g er til þá er það ótvírætt ákvarðað.

Fallið g kallast andhverfa fallsins f og við táknum það með f^{-1}.

Sýnidæmi

Látum $f(x) = (2x + 8)^3$

Finnum andhverfu f.

Látum $f(x) = (2x + 8)^3$

Finnum andhverfu f.

Ein leið til að finna andhverfu falls ef hún er til er að leysa jöfnuna $y = f(x)$ fyrir x.

Finnið andhverfur eftirfarandi falla:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -11x$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x+2}{3}$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 1$

MARGLIÐUR

Látum $f(x) = a$, þ.a. $a \in \mathbb{R}$

Látum $f(x) = a$, þ.a. $a \in \mathbb{R}$

Við segjum að $f(x)$ sé 0. stigs margliða eða fastafall.

0. stigs margliður

Látum $f(x) = a$, þ.a. $a \in \mathbb{R}$

Við segjum að $f(x)$ sé 0. stigs margliða eða fastafall.

1. STIGS MARGLIÐUR

Látum $f(x) = a_1 x + a_0$, þ.a. $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Látum $f(x) = a_1x + a_0$, þ.a. $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Við segjum að $f(x)$ sé 1. stigs margliða eða lína.

1. stigs margliður

Látum $f(x) = a_1 x + a_0$, þ.a. $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Við segjum að $f(x)$ sé 1. stigs margliða eða lína.

Látum $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Látum $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Við segjum að $f(x)$ sé 2. stigs margliða eða fleygbogi.

Látum $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Við segjum að $f(x)$ sé 2. stigs margliða eða fleygbogi.

Látum $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Látum $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Við segjum að $f(x)$ sé 3. stigs margliða eða fleygbogi.

Látum $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Við segjum að $f(x)$ sé 3. stigs margliða eða fleygbogi.

Margliða af stigi n er fall af gerðinni:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

þar sem n er endanlegt $a_i \in \mathbb{R}, \forall i$ og $a_n \neq 0$.

Talan n kallast stig margliðunnar, og tölurnar a_i kallast stuðlar hennar.

Af hvaða stigi eru eftirfarandi margliður?

- $x^2 + x - 3x^4 + 1$
- $15x^5 + 2x - 8x^3 + x^{14} - x^2 + 100$
- $x^n + x^{2n}$ þar sem $n \in \mathbb{N}$

Ræð raunföll eru föll af gerðinni,
$f : A \to B$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Þar sem P og Q eru margliðuföll.

Ræð raunföll eru föll af gerðinni,
$f : A \to B$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Þar sem P og Q eru margliðuföll.

Núllstöðvar $Q(x)$ nefnast skaut fallsins f.

Ræð raunföll eru föll af gerðinni,
$f : A \to B$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Þar sem P og Q eru margliðuföll.

Núllstöðvar $Q(x)$ nefnast skaut fallsins f.

Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall.

VAXANDI OG STRANGLEGA VAXANDI FÖLL

Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall.
Fallið f er sagt vera *vaxandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Vaxandi og stranglega vaxandi föll

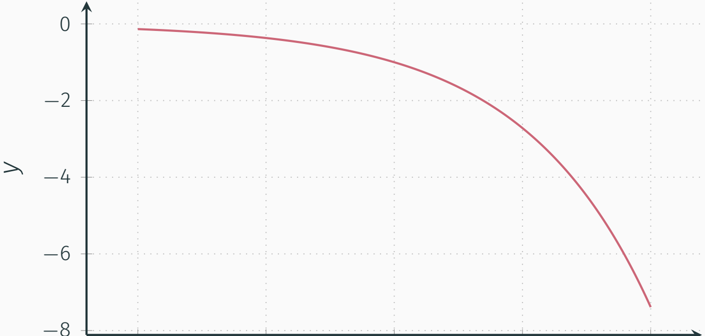
Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall.
Fallið f er sagt vera *vaxandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Ef ströng ójafna gildir $\big(f(x_1) < f(x_2)\big)$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* vaxandi.

Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall.
Fallið f er sagt vera *vaxandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Ef ströng ójafna gildir $\big(f(x_1) < f(x_2)\big)$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* vaxandi.

MINNKANDI OG STRANGLEGA MINNKANDI FÖLL

Fallið f er sagt vera *minnkandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Fallið f er sagt vera *minnkandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Ef ströng ójafna gildir $(f(x_1) > f(x_2))$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* minnkandi.

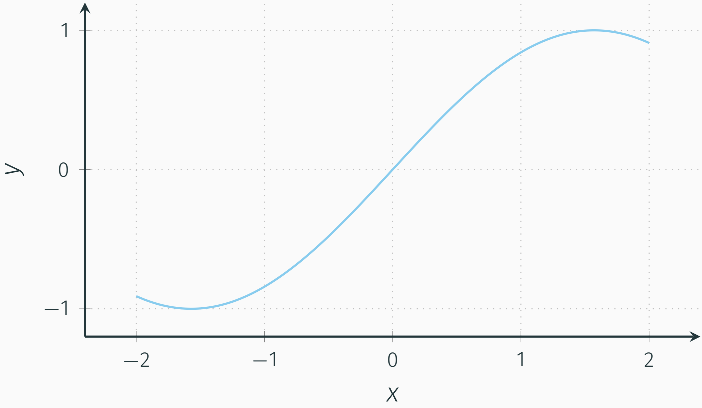


MINNKANDI OG STRANGLEGA MINNKANDI FÖLL

Fallið f er sagt vera *minnkandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Ef ströng ójafna gildir $(f(x_1) > f(x_2))$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* minnkandi. Fall sem er annað hvort vaxandi eða minnkandi er sagt vera einhalla.

Ef fallið er stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi er það sagt vera stranglega einhalla.

HVORKI VAXANDI NÉ MINNKANDI FALL



Skilgreining: Fall f er

- jafnstætt (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x$ í formengi f

Skilgreining: Fall f er

- jafnstætt (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x$ í formengi f
- oddstætt (odd) ef $f(-x) = -f(x), \quad \forall x$ í formengi f

Skilgreining: Fall f er

- jafnstætt (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x$ í formengi f
- oddstætt (odd) ef $f(-x) = -f(x), \quad \forall x$ í formengi f

$f(x) = 2x$, skilgreint fyrir $x \in \mathbb{R}$, er oddstætt

Skilgreining: Fall f er

- jafnstætt (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x$ í formengi f
- oddstætt (odd) ef $f(-x) = -f(x), \quad \forall x$ í formengi f

$f(x) = 2x$, skilgreint fyrir $x \in \mathbb{R}$, er oddstætt
Höfum $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$

$f(x) = x^2$ er jafnstætt

Skilgreining:
Fall af gerðinni $f(x) = a^x$, þar sem $a \in \mathbb{R}$, kallast veldisvísisfall með grunntölu a.

Skilgreining:
Fall af gerðinni $f(x) = a^x$, þar sem $a \in \mathbb{R}$, kallast veldisvísisfall með grunntölu a.

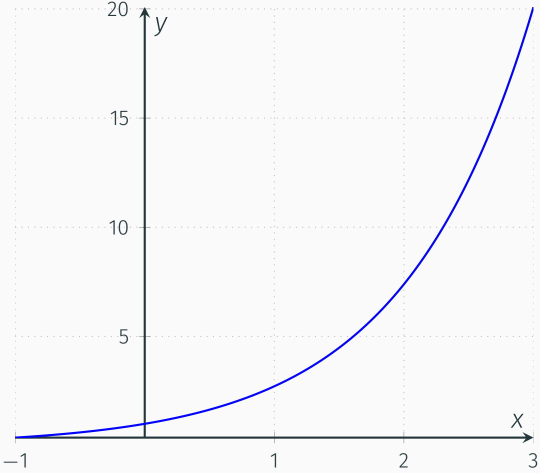
Skilgreining:
Fall sem er andhverfa veldisvísisfalls með grunntölu a, kallast lografall (eða logri) með grunntölu a og er táknað með $\log_a(x)$.

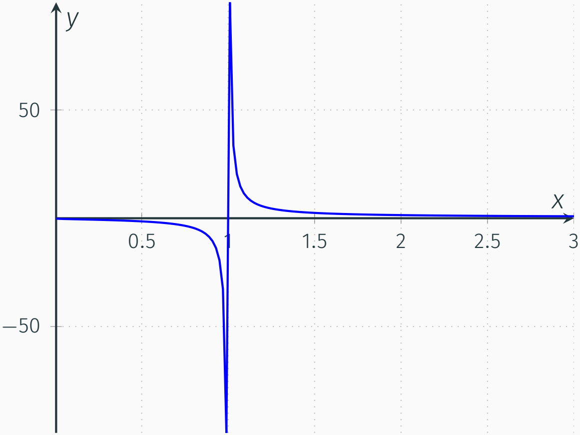
Skilgreining:
Fall af gerðinni $f(x) = a^x$, þar sem $a \in \mathbb{R}$, kallast veldisvísisfall með grunntölu a.

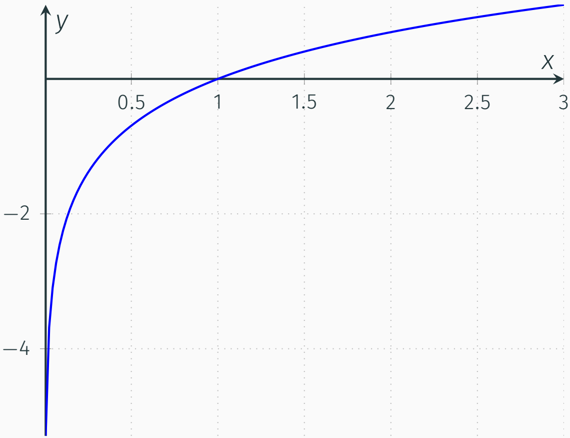
Skilgreining:
Fall sem er andhverfa veldisvísisfalls með grunntölu a, kallast lografall (eða logri) með grunntölu a og er táknað með $\log_a(x)$.

Með öðrum orðum, þá er logri tölunnar x með grunntölu a það veldi b sem þarf að hefja a í til þess að fá út x, þ.e. sú tala b sem uppfyllir: $a^b = x$ Þar sem föllin eru andhverfur höfum við:

$$\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x.$$


20
15
10
5
y
x
−1
1
2
3


y
x
50
−50
0.5
1
1.5
2
2.5
3


y
x
0.5
1
1.5
2
2.5
3
−2
−4

Skilgreining:
Fallið

$$f(x) = e^x$$

þar sem e er tala Eulers, $e \simeq 2.718$, kallast náttúrulega veldisvísisfallið.

Skilgreining:
Fallið

$$f(x) = e^x$$

þar sem e er tala Eulers, $e \simeq 2.718$, kallast náttúrulega veldisvísisfallið.

Skilgreining:
Andhverfa náttúrulega veldisvísisfallsins kallast náttúrulegi logrinn og er táknað með $\ln(x)$.

Tökum tvö föll $f : A \to B$ og $g : C \to D$. Gerum ráð fyrir að

$$g(C) \subset A$$

(þ.e. öll $g(x)$ eru í formengi f).
Skilgreinum samsetta (composite) fallið $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Látum $g(x) = \sin x$ og $f(x) = x^2$

Dæmi

Látum $g(x) = \sin x$ og $f(x) = x^2$

Þá fæst:

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

Látum $g(x) = \sin x$ og $f(x) = x^2$

Þá fæst:

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f(\sin x) = \sin^2(x)$$

SÝNIDÆMI

Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ þ.a. $f(x) := e^{x^3}$ og $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ þ.a. $g(x) := \ln(12x)$.

Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ þ.a. $f(x) := e^{x^3}$ og $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ þ.a. $g(x) := \ln(12x)$.

Hvað af eftirtöldu gildir þá um $g \circ f$?

- $g \circ f$ er gagntæk.
- $g \circ f$ er átæk en ekki eintæk.
- $g \circ f$ er eintæk en ekki átæk.

Grunnhornaföllin eru sínus og kósínus: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Grunnhornaföllin eru sínus og kósínus: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Látum $\mathbf{v}$ vera vigur af lengd 1 sem myndar hornið θ við jákvæða hluta x-ássins.

Grunnhornaföllin eru sínus og kósínus: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

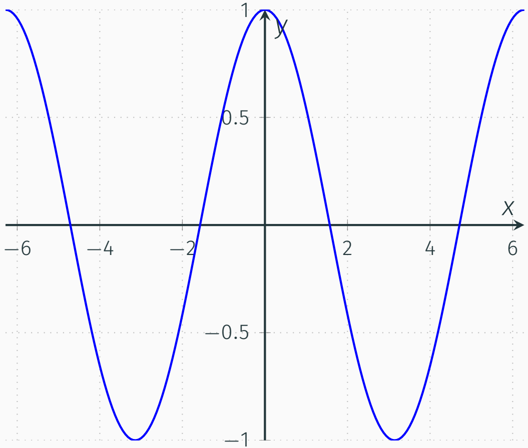
Látum $\mathbf{v}$ vera vigur af lengd 1 sem myndar hornið θ við jákvæða hluta x-ássins.

Þá er

- $\cos(\theta)$ skilgreint sem ofanvarp $\mathbf{v}$ á x-ásinn.
- $\sin(\theta)$ skilgreint sem ofanvarp $\mathbf{v}$ á y-ásinn.

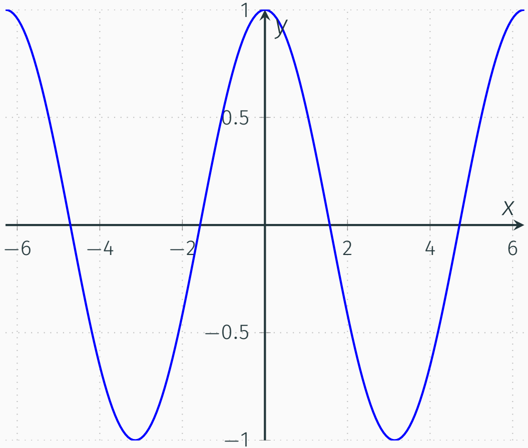
cos(x) er jafnstætt fall

- $g(x) = \cos(x)$



cos(x) er jafnstætt fall

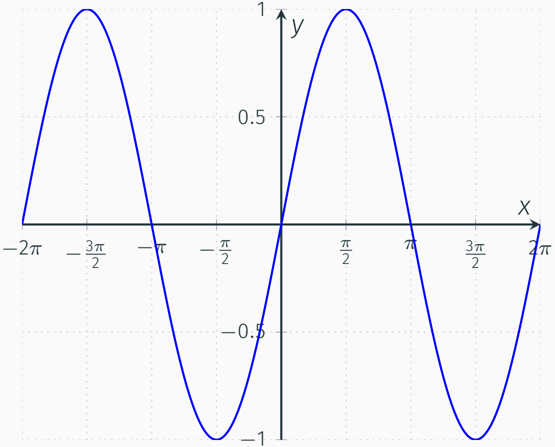
- $g(x) = \cos(x)$



Graf jafnstæðs falls er **samhverft** um *y*-ás.

sin(x) er oddstætt fall

- $f(x) = \sin(x)$



Graf oddstæðs falls er **samhverft** um núllpunktinn.