Dæmapása 1

1. Látum $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2\}$ vera mengi. Hver eftirtalinna eru varpanir?

   (a) $f : A \to B$ þar sem $b_1 = f(a_1)$ og $b_2 = f(a_2) = f(a_3)$

   (b) $f : A \to B$ þar sem $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$ og $f(a_3)$ er ekki til

   (c) $f : B \to A$ þar sem $a_1 = f(b_1), a_2 = f(b_2)$ og $a_3 = f(b_2)$

   (d) $f : B \to A$ þar sem $a_1 = f(b_1)$ og $a_3 = f(b_2)$

   Lausn:

   Liðir (a) og (d) eru varpanir. Athugum að í (b)-lið þá er $f(a_3)$ ekki til, þ.e. f varpar ekki öllum stökum formengisins og er því ekki vörpun. Í (c)-lið þá varpast eitt stak í formenginu, b_2, í tvö mismunandi stök í bakmenginu, a_2 og a_3, og þar getur f því heldur ekki verið vörpun. Í (a)-lið er f vel skilgreind vörpun sem er ekki eintæk, því a_2 og a_3 varpast í sama stakið og í (d)-lið er hún einnig vel skilgreind en ekki átæk, þar sem ekkert stak varpast í a_2.

2. Hver eru formengi, bakmengi og myndmangi eftirfarandi falla?

   (a) Fallið f í (a)-lið í síðasta dæmi

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2$

   Lausn:

   (a) Við höfum $f : A \to B$ svo að A er formengið og B er bakmengið. Myndmengið er mengi þeirra staka $b \in B$ þ.a. til sé stak $a \in A$ sem uppfyllir $b = f(a)$. Þetta gildir fyrir öll stökin í B, þar sem $b_1 = f(a_1)$ og $b_2 = f(a_2)$. Því er myndmengið $\{b_1, b_2\} = B$.

   (b) Höfum formengi = bakmengi = $\mathbb{R}$. Við vitum einnig að sínusfallið tekur gildi á bilinu frá -1 og upp í 1, svo að myndmengið er $[-1, 1]$.

   (c) Höfum formengi $\mathbb{R}$ og bakmengi $\mathbb{Z}$. Eina gildið sem fallið tekur er talan 2 og því er myndmengið $\{2\}$.

Dæmapása 2

3. Segið til um hvort eftirfarandi föll séu eintæk, átæk, gagntæk eða ekkert af þessu:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -11x$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -4$

   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$

   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 1$

   Lausn:

   (a) Fallið er átækt en ekki eintækt. Athugið að hér er formengið $\mathbb{R}$ en bakmengið $\mathbb{R}_+$. Fallið er ekki eintækt þar sem $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$ svo að fyrir tvö ólík gildi í formenginu, 1 og -1 þá er fallgildið það sama.

   Til þess að sýna að fallið sé átæk þurfum við að sýna að fyrir sérhverja jákvæða rauntölu, y sé til einhver rauntala, x, þ.a. $x^2 = y$. Þar sem y er alltaf jákvæð, þá getum við valið $x := \sqrt{y}$.

   (b) Fallið er gagntækt. Það er eintækt því við höfum:

   $$-11x_1 = -11x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

   Það er átækt því að ef við höfum $y \in \mathbb{R}$ þá getum við valið $x := -\frac{1}{11}y$ og þá fæst

   $$f(x) = -11x = -11 \cdot \left(-\frac{1}{11}y\right) = y.$$

   (c) Fallið er hvorki eintækt né átækt, þar sem öll stökin í formenginu taka sama fallgildið, -4, og myndmengið er $\{-4\} \neq \mathbb{R}$ (myndmengið ekki það sama og bakmengið).

   (d) Fallið er eintækt en ekki átækt. Athugum að hér er formengið $\mathbb{Z}$, og þar sem fallið varpar öllum stökunum í sig sjálf, þá er myndmengið einnig $\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$.

(e) Fallið er gagntækt. Höfum:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5{x_1}^3 + 1 = 5{x_2}^3 + 1$$
$$\Rightarrow 5{x_1}^3 = 5{x_2}^3$$
$$\Rightarrow {x_1}^3 = {x_2}^3$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

svo það er eintækt. Fyrir $y \in \mathbb{R}$ veljum við $x := \sqrt[3]{\frac{y-1}{5}} \in \mathbb{R}$. Þá fæst:

$$f(x) = 5x^3 + 1 = 5\left(\sqrt[3]{\frac{y-1}{5}}\right)^3 + 1$$
$$= 5 \cdot \frac{y-1}{5} + 1$$
$$= y - 1 + 1 = y$$

svo að fallið er átækt.

Dæmapása 3

4. Finnið andhverfur eftirfarandi falla:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -11x$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x+2}{3}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 1$

Lausn:

(a) Setjum $y = f(x)$ og einangrum fyrir x. Fáum:

$$y = -11x \Rightarrow -\frac{1}{11}y = x$$

svo að $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = -\frac{1}{11}y$ er andhverfa fallsins.

(b) Setjum $y = f(x)$ og einangrum fyrir x. Fáum:

$$y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow 3y = x + 2$$
$$\Rightarrow 3y - 2 = x$$

svo að $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = 3y - 2$ er andhverfa fallsins.

(c) Setjum $y = f(x)$ og einangrum fyrir x. Fáum:

$$y = 5x^3 + 1 \Rightarrow y - 1 = 5x^3$$
$$\Rightarrow \frac{y-1}{5} = x^3$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{y-1}{5}} = x$$

svo að $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y-1}{5}}$ er andhverfa fallsins.

Dæmapása 4

5. Finnið skurðpunkta eftirfarandi margliða við x og y-ás ef þeir eru til:

   (a) $-x^2 + 9x + 1$

   (b) $-6x^2 + 7x - 17$.

   (c) $x^{2n} + 6x^n + 9$

Lausn: Við finnum skurðpunkt við y-ás með því að setja $x = 0$ inn í margliðuna, en skurðpunkta við y-ás með því að setja margliðuna $= 0$.

(a) Fyrir $x = 0$ fæst $-0^2 + 9 \cdot 0 + 1 = 1$ svo að skurðpunkturinn við y-ás er 1.

Setjum $-x^2 + 9x + 1 = 0$. Rifjum upp formúlu fyrir lausn á annarstigs jöfnu þ.e. jafnan $ax^2 + bx + c = 0$ hefur lausnir

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot ac}}{2a}.$$

Við byrjum þá að reikna út aðgreininn:

$$D = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 89 - 4 = 85.$$

Þar sem aðgreinirinn er > 0, þá hefur jafnan $-x^2 + 9x + 1 = 0$ tvær rauntölulausnir, en þær eru þá

$$x = \frac{-9 + \sqrt{85}}{-2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{85}$$

og

$$x = \frac{-9 - \sqrt{85}}{-2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{85}.$$

(b) Fyrir $x = 0$ fæst $-6 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 - 17 = -17$ svo að skurðpunkturinn við y-ás er -17.

Setjum $-6x^2 + 7x - 17 = 0$ og notum sömu aðferð og í (a)-lið. Við byrjum þá að reikna út aðgreininn: $D = b^2 - 4ac$, og við fáum -359. Þar sem aðgreinirinn er < 0, þá hefur jafnan $-6x^2 + 7x - 17 = 0$ engar rauntölurætur.

(c) Fyrir $x = 0$ fæst $0^{2n} + 6 \cdot 0^n + 9 = 9$ svo að skurðpunkturinn við y-ás er 9.

Setjum $x^{2n} + 6x^n + 9 = 0$. Við gerum breytuskipti, þ.e. látum $y := x^n$. Athugum að $x^{2n} = (x^n)^2 = y^2$. Jafnan okkar gefur því: $y^2 + 6y + 9 = 0$. Við höfum þá annars stigs jöfnu sem við leysum eins og áður. Aðgreinirinn verður: $D = b^2 - 4ac = 0$ svo að eina lausnin okkar er $y = \frac{-6}{2} = -3$. Nú viljum við leysa jöfnuna $x^n = -3$, en við sjáum að hún hefur ekki lausn ef n er slétt tala, en lausnina $x = \sqrt[n]{-3} = -\sqrt[n]{3}$ ef n er oddatala.

Dæmapása 5

6. Stofnbrotsliðið:

(a) $\dfrac{2x+1}{x(x-1)}$

(b) $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$

Lausn:

(a) Höfum:

$$\frac{2x+1}{x(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}$$

þar sem $A_1(x-1) + A_2(x) = 2x+1$, þ.e.

$$(A_1 + A_2)x - A_1 = 2x + 1$$

svo að með því að bera saman stuðla fáum við:

$$\begin{cases} -A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = -1 \\ A_1 + A_2 = 2 \Rightarrow A_2 - 1 = 2 \end{cases}$$

svo að $A_2 = 3$.

Við höfum því fengið:

$$\frac{2x+1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1}.$$

(b) Höfum:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x+1}$$

þar sem $A_1(x)(x+1) + A_2(x+1) + A_3(x^2) = 1$, þ.e.

$$(A_1 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2)x + A_2 = 1.$$

Með því að bera saman stuðla fáum við:

$$\begin{cases} A_2 = 1 \\ A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -1 \\ A_1 + A_3 = 0 \Rightarrow A_3 = 1. \end{cases}$$

Við höfum því fengið:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}.$$

Dæmapása 6

7. Segið til um hvort eftirfarandi föll séu vaxandi, minnkanndi (og þá stranglega eða ekki) eða hvorugt.

   (a) $f(x) = 5x$

   (b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

   (c) $f(x) = -x^2$

   (d) $f(x) = 18$

   Lausn:

   (a) Fallið er stranglega vaxandi því ef við gefum okkur $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ þ.a. $x_1 < x_2$ þá er $5x_1 < 5x_2$, þ.e. $f(x_1) < f(x_2)$.

   (b) Fallið er stranglega minnkandi því ef við gefum okkur $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ þ.a. $x_1 < x_2$ þá fæst:

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2$$

   $$\Rightarrow -\frac{1}{2}x_1 + 3 > -\frac{1}{2}x_2 + 3,$$

   þ.e. $f(x_1) > f(x_2)$.

   (c) Fallið er hvorki vaxandi né minnkandi. Þetta sést með því að taka til dæmis punktana $-2, -1, 1$ og 2 og bera saman fallgildin. Höfum $-2 < -1$ og $f(-2) = -(-2)^2 = -4 < -1 = -(-1)^2 = f(-1)$, þ.e. $f(-2) < f(-1)$. Hins vegar fæst: $1 < 2$ og $f(1) = -1^2 = -1 > -4 = -2^2 = f(2)$, þ.e. $f(1) > f(2)$. Við höfum reyndar að fallið er vaxandi á neikvæða raunásnum en minnkandi á jákvæða raunásnum.

   (d) Fallið er bæði vaxandi og minnkandi, en ekki stranglega. Höfum $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ og $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ því að $f(x_1) = f(x_2) = 18$ fyrir öll $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

8. Segið til um hvort eftirfarandi föll séu jafnstæð, oddstæð eða hvortugt.

   (a) $f(x) = 5x$
   (b) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$
   (c) $f(x) = -x^2$
   (d) $f(x) = 18$

   Lausn:

   (a) Fallið er oddstætt því að $f(-x) = 5(-x) = -(5x) = -f(x)$.
   (b) Höfum $f(-x) = -\frac{1}{2}(-x) + 3 = \frac{1}{2}x + 3$ sem er hvorki það sama og $f(x)$ né $-f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ svo fallið er hvorki jafnstætt né oddstætt.
   (c) Fallið er jafnstætt því að $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$.
   (d) Fallið er jafnstætt því að $f(-x) = 18 = f(x)$.

Dæmapása 7

9. Reiknið

   (a) $\log_{10}(1000)$
   (b) $\log_2(16)$
   (c) $\ln(e^x)$

   Lausn:

   (a) Við höfum $10^3 = 1000$ svo að $\log_{10}(1000) = 3$.
   (b) Við höfum $2^4 = 16$ svo að $\log_2(16) = 4$.
   (c) Munum að grunntala ln er e. Við höfum $e^x = e^x$ svo að $\ln(e^x) = x$ (þetta er einnig afleiðing þess að föllin $\ln(x)$ og e^x eru andhverfur).

10. Einfaldið:

   (a) $\cos(x + 30°)$, (höfum $\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ og $\sin(30°) = \dfrac{1}{2}$).
   (b) $\sin(x + \frac{2\pi}{3})$, (höfum $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\dfrac{1}{2}$ og $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

Lausn:

(a) Notum summureglu fyrir hornaföll:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Fáum:

$$\begin{aligned}\cos(x+30^\circ) &= \cos(x)\cos(30^\circ) - \sin(x)\sin(30^\circ)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x).\end{aligned}$$

(b) Notum summureglu fyrir hornaföll:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

Fáum:

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x).\end{aligned}$$

Dæmapása 8

11. Látum $f(x) = 3x^2$ og $g(x) = 2x+4$. Finnið $(g \circ f)(x)$ og $(f \circ g)(x)$.

Lausn:

Finnum $g \circ f$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(3x^2)\\ &= 2(3x^2)+4\\ &= 6x^2+4.\end{aligned}$$

Finnum svo $f \circ g$ á sama hátt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+4) &= 3(2x+4)^2\\ &= 3(4x^2+16x+16)\\ &= 12x^2+48x+48.\end{aligned}$$

12. Látum $f(x) := x^3$ og $g(x) := 2x - 1$. Hvað er $f \circ g(-2)$?

Lausn: Byrjum á því að finna fallið $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^3.$$

Setjum nú -2 inn í þessa margliðu og fáum:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(-2) &= (2(-2) - 1)^3 \\ &= (-5)^3 = -125.\end{aligned}$$