

Reiknireglur í algebru

Kristbjörg Anna Þórarinsdóttir

Háskóli Íslands

6. ágúst 2015

Algildi

Við skilgreinum algildi tölu x , táknað með $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ef } x \geq 0 \\ -x & \text{ef } x < 0 \end{cases}$$

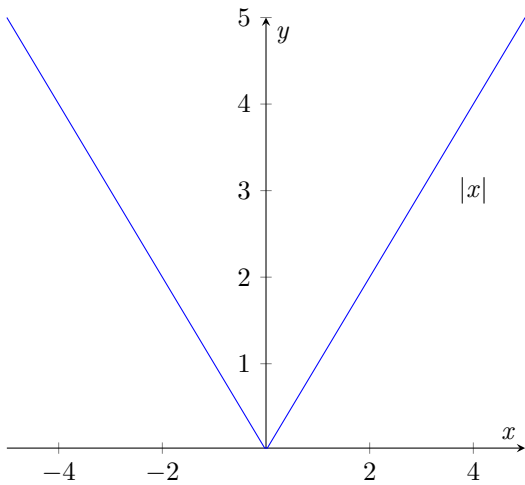
Tafla 1: Reiknireglur um algildi

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$|x| \geq 0$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$



Veldi og rætur

Tafla 2: Reiknireglur um veldi

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Reiknireglur um rætur

Tafla 3: Reiknireglur um rætur

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$$

Sýnidæmi

$$\frac{(25x^2 - 4)x}{\left(x^{\frac{1}{2}}3x^2\right)^2(5x + 2)}$$

Reiknið:

1. $5 \cdot 7 + 3 \cdot (2 - 11)$

2. $3 \cdot 11 - 7 \cdot (2 + 5)$

Teiknið bilið $[-10, 10]$ og merkið svæðin þar sem $|x + 2| - 5 > 0$.

Einfaldið:

1. $8ab^2 - 4a + 6b^2 - 2ab^2 + 9a$

2. $5x^2 + 4y + 3xy - 11y + 2xy - 3x^2$

3.
$$\frac{8a^3(ab^4 + b^4 - 2b^4)(a^2 - 1)^2}{(2ab(a - 1))^3(a + 1)}$$

Einfaldið:

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot a^{1/2} \cdot \sqrt{c}$

2.
$$\frac{a^{-3} \cdot b^4 \sqrt{c}}{a^{-2} \cdot b^{4/2} \cdot c^{-1/2}}$$

3.
$$\left(\frac{\sqrt{x^2 \cdot y^3 \cdot x^{-2}}}{x \cdot y^{3/2}} \right)^3$$

Vigrar

Vigur í \mathbb{R}^2 hefur tvö hnit og táknar punkt í sléttunni \mathbb{R}^2 . Ef vigur \mathbf{v} hefur hnitin x og y þá ritum við

$$\mathbf{v} = (x, y) \quad \text{eða} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vigrar

Vigur í \mathbb{R}^2 hefur tvö hnit og tákna punkt í sléttunni \mathbb{R}^2 . Ef vigur \mathbf{v} hefur hnitin x og y þá ritum við

$$\mathbf{v} = (x, y) \quad \text{eða} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vigur í \mathbb{R}^3 hefur þrjú hnit. Ef vigurinn \mathbf{v} hefur hnitin v_1, v_2, v_3 þá táknum við það með

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{eða} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Vigra hafa lengd og stefnu.

Lengdin er fundin með Pýþagórasarreglunni Ef vigurinn \mathbf{v} hefur hnit x og y þá er lengd hans:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vigra hafa lengd og stefnu.

Lengdin er fundin með Pýþagórasarreglunni Ef vigurinn \mathbf{v} hefur hnit x og y þá er lengd hans:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vigurinn með lengdina 1 er kallaður einingavigur.

Vigrarnir í stefnu hnitaásanna hafa sérstök nöfn

$$\hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$$

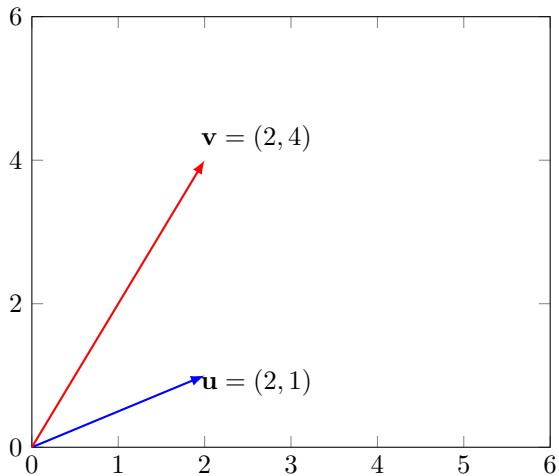
$$\hat{\mathbf{j}} = (0, 1, 0)$$

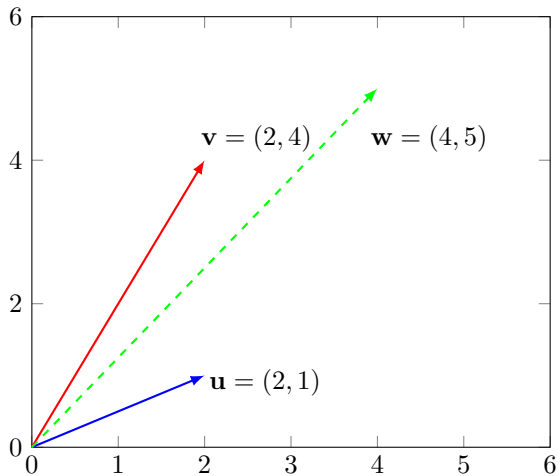
$$\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$$

Samlagning vigra

Fæst með því að leggja saman x og y hnit vigranna:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}$$





Innfeldi vigra

Einnig kallað depilmargfeldi

Innfeldi vigra

Einnig kallað depilmargfeldi
Innfeldi vigrana

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

Innfeldi vigra

Einnig kallað depilmargfeldi
Innfeldi vigrana

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

Jafngild skilgreining er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)$$

Dæmi

Finna $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = (3, 2, 1)$$

$$\mathbf{b} = (-4, 5, 2)$$

Dæmi

Finna horn milli vigranna

$$\mathbf{a} = (2, 7, 1)$$

$$\mathbf{b} = (1, 5, 3)$$

Finnið lengdir eftirfarandi vigra, leggið þá saman og finnið innfeldi þeirra. Eru vigrarnir hornréttir?

1. $\mathbf{a} = (1, 2)$ og $\mathbf{b} = (2, -1)$
2. $\mathbf{a} = (-5, 3)$ og $\mathbf{b} = (0, -6)$
3. $\mathbf{a} = (8, 2)$ og $\mathbf{b} = (7, 3)$
4. $\mathbf{a} = (2, 0, -1)$ og $\mathbf{b} = (8, -1, 3)$

Finnið hornið milli eftirfarandi vigra:

1. $\mathbf{a} = (0, 3)$ og $\mathbf{b} = (0, -2)$
2. $\mathbf{a} = (1, 1)$ og $\mathbf{b} = (0, -1)$
3. $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ og $\mathbf{b} = (2, 3, 1)$

Krossfeldi vigra

er táknað með $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Krossfeldi vigra

er táknað með $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

i	j	k
a_x	a_y	a_z
b_x	b_y	b_z

Krossfeldi vigra

er táknað með $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

i	j	k
a_x	a_y	a_z
b_x	b_y	b_z

Þá er

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \mathbf{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Dæmi

Finna horn sem $a \times b$ myndar við x-ás.

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{b} = 3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$$

Dæmi

Finnum krossmargfeldi vigrana

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0)$$

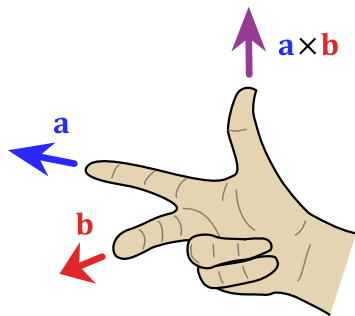
$$\mathbf{b} = (0, 1, 0)$$

Dæmi

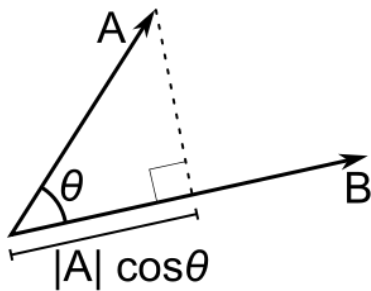
Finnum krossmargfeldi vigrana

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{b} = (0, 1, 0)$$

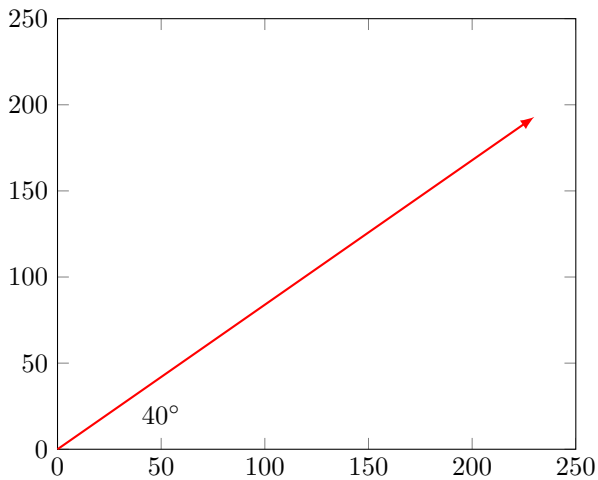


Ofanvarp



Dæmi

Höfum vigurinn \mathbf{v} af lengd 300 sem myndar 40° horn við x -ásinn.
Finnið ofanvarp við x og y -ás.



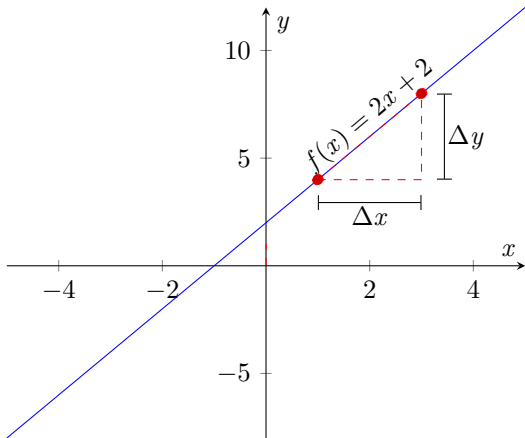
Jöfnur

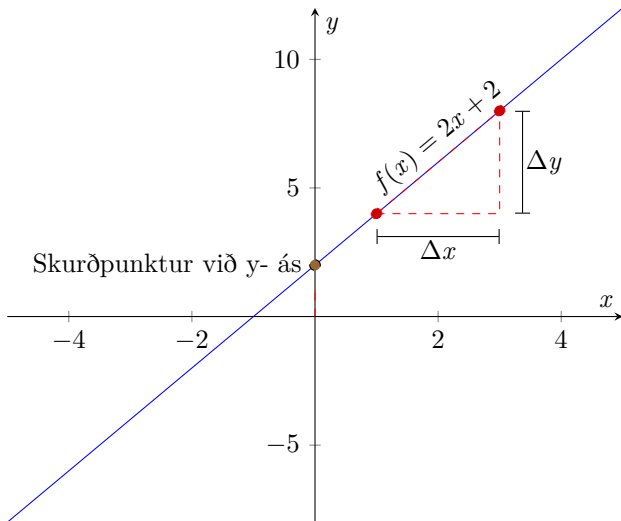
Fyrsta stigs margliða er á forminu

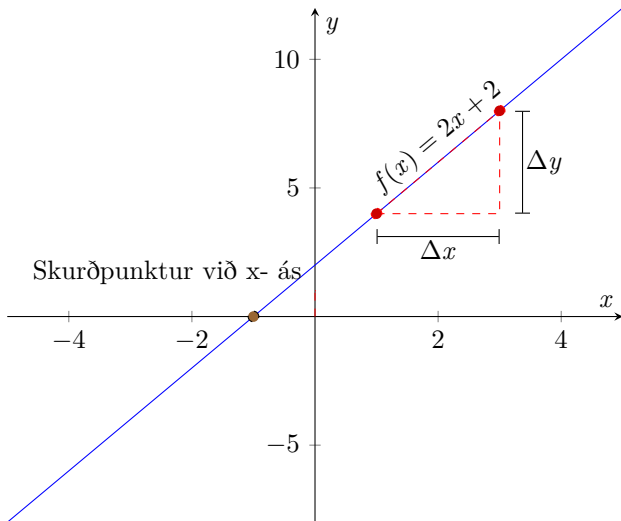
$$Ax + B = 0$$

Þessi jafna er bein lína og er betur þekkt á forminu

$$(y - y_0) = h(x - x_0)$$







Dæmi

Finndu jöfnu línu sem er hornrétt á

$$y = 8x - 5$$

Jöfnur

Annars stigs margliða er á forminu

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$A \neq 0$ og A, B, C eru rauntölur, nefnast stuðlar. Almenn lausn hennar er

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Jöfnur

Annars stigs margliða er á forminu

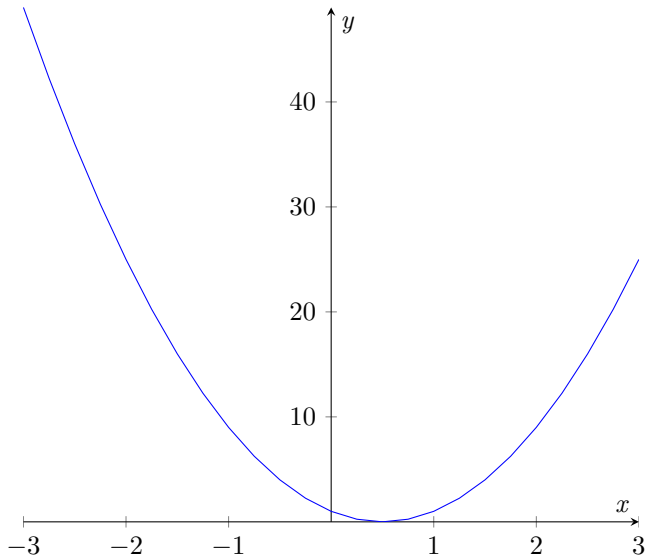
$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

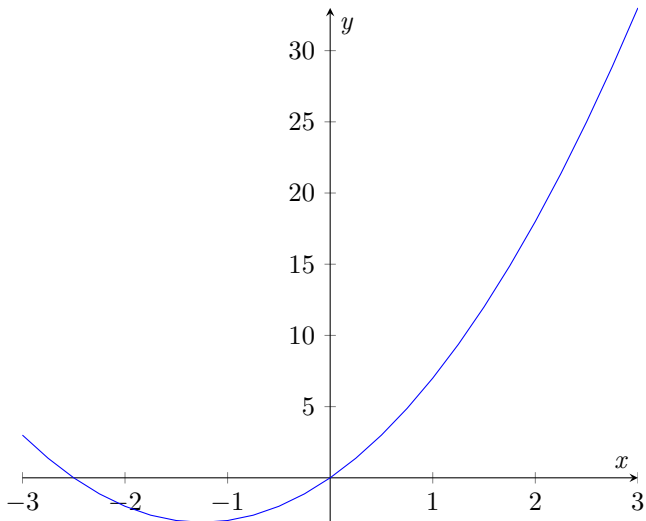
$A \neq 0$ og A, B, C eru rauntölur, nefnast stuðlar. Almenn lausn hennar er

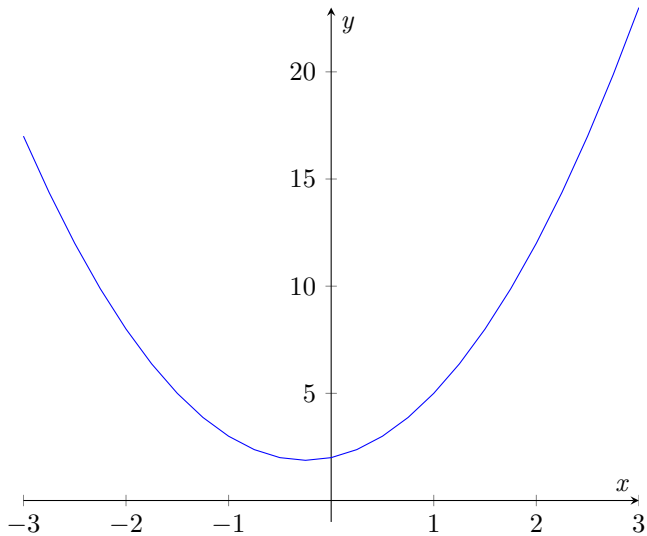
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$D = \sqrt{B^2 - 4AC}$$

er oft kallaður D-liður.







Dæmi

Finnið rætur margliðunnar

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Dæmi

Finnið rætur margliðunnar

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Dæmi

$$\frac{3x^2 - 3}{2y} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{y^2 + 1}$$

Jöfnur

Þriðjastigs margliða er á forminu

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Jöfnur

Þriðjastigs margliða er á forminu

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

- ▶ Erfiðara að leysa dæmin.
- ▶ Til almennlausn en formúlan fyrir hana er löng og flókin.
- ▶ Leysa dæmin með því að finna rætur með brute force.

Dæmi

Finnið rætur margliðunnar

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 24 = 0$$

Jöfnur

Fjórðastigs margliða er á forminu

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

Jöfnur

Fjórðastigs margliða er á forminu

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

- ▶ Til almenn lausn, en hún er löng og flókin.
- ▶ Fjórðastigs margliður eru oft dulnar annarsstigs margliður.
- ▶ Þátta í höndunum líkt og með þriðjastigs margliður.

Dæmi

Finnið rætur margliðunnar

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

Jöfnur

Fimmtastigs margliður Engin almenn lausn er til fyrir margliður af stigi 5 eða hærra.

Jöfnur

Fimmtastigs margliður Engin almenn lausn er til fyrir margliður af stigi 5 eða hærra. Nauðsynlegt að bæta við **TVINNTÖLUM** svo hægt sé að leysa þær margliður.

Tvinntölur

Tvinntölur

Til hvers?

Tvinntölur

Til hvers?

Hvað er tvinntala?

Tvinntölur

Tvinntala (*e.complex number*) er tala sem er hægt að rita

$$z = x + yi$$

þar sem x og y eru rauntölur og i er ímyndaður hluti. Uppfyllir jöfnuna

$$i^2 = -1$$

.

Tvinntölur

Raunhluti tvinntölu er táknaður

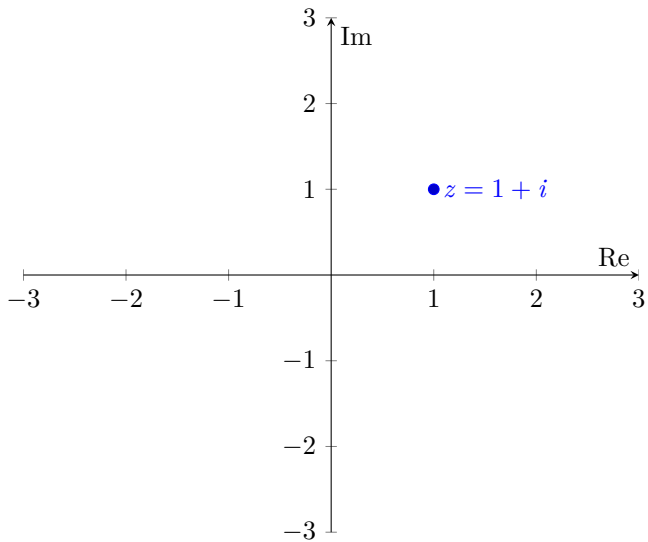
$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + yi) = x$$

Ímyndaði hluti hennar

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x + yi) = y$$

Tvinntölur

Tvinntalna planið Hægt er að líta á tvinntölu sem skalar eða vigur í tvívíðu kartesísku hnitakerfi kallað tvinntalnaþalanið.



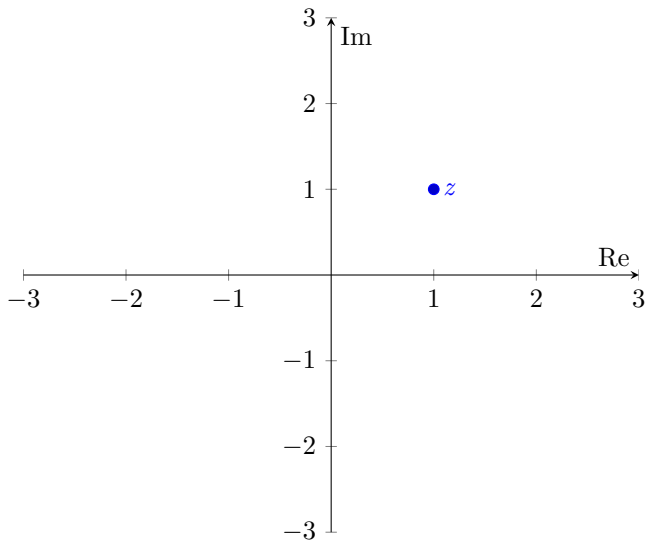
Tvinntölur

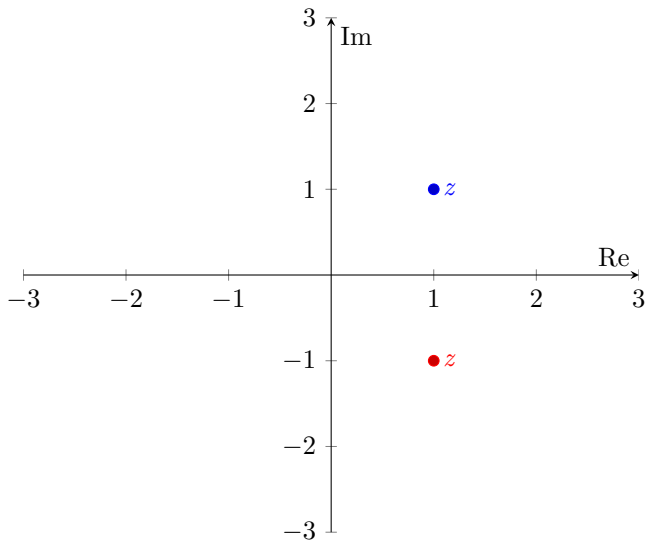
Samokatalan er táknuð með yfirstriki \bar{z} eða stjörnu z^* . Ef samokun er beitt á tvinntölu þá breytist formerki i en formerki rauntalnanna helst óbreytt. $x, y \in \mathbb{R}$ og $z, w \in \mathbb{C}$

Tvinntölur

Samokatalan er táknuð með yfirstriki \bar{z} eða stjörnu z^* . Ef samokun er beitt á tvinntölu þá breytist formerki i en formerki rauntalnanna helst óbreytt. $x, y \in \mathbb{R}$ og $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\bar{i} &= -i \\ \overline{x + yi} &= x - yi \\ \overline{z\bar{w}} &= \bar{z} w \\ \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z - w} &= \bar{z} - \bar{w} \\ \overline{(z/w)} &= \bar{z}/\bar{w}\end{aligned}$$





Tvinntölur

Deiling tvinntölu Þegar deila skal með tvinntöllum er margfaldað með samoka nefnarans í nefnara og teljara.

Tvinntölur

Deiling tvinntölu Þegar deila skal með tvinntöllum er margfaldað með samoka nefnarans í nefnara og teljara.

$$\frac{v + wi}{x + yi} \cdot \frac{\overline{x + yi}}{\overline{x + yi}}$$

Sýnidæmi

Leysum dæmið

$$\frac{2 + 3i}{5 + 6i}$$

Tvinntölur

Lengd tvinntölu Til að finna lengd á tvinntölu (*e. absolute value*) er Pýþagóras notaður

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Finnið hallatölur eftirfarandi lína og skurðpunkta þeirra við x -ás og y -ás:

1. $2y + 3x = 1$

2. línan sem fer í gegnum punktana $(2, 3)$ og $(-1, 2)$

3. $ay + bx = c$

Leysið eftirfarandi annars stigs jöfnur:

1. $x^2 - 1 = 0$

2. $10x^2 + 3x - 18 = 0$

3. $2x^2 - 4x + 7 = 5x - 3$

Finnið lengdir eftirfarandi tvinntalna, samokatölur þeirra og reiknið $z \cdot w$ og z/w .

1. $z = 2 + 3i$ og $w = 1 - i$

2. $z = 3i$ og $w = -3 - 5i$

3. $z = 2 + ai$ og $w = a - i$, þar sem $a \in \mathbb{R}$

Ójöfnur

$$\begin{aligned} |x - a| = D &\Rightarrow \text{annað hvort } x = a - D \text{ eða } x = a + D \\ |x - a| < D &\Rightarrow a - D < x < a + D \\ |x - a| \leq D &\Rightarrow a - D \leq x \leq a + D \\ |x - a| > D &\Rightarrow \text{annað hvort } x < a - D \text{ eða } x > a + D \end{aligned}$$

Sýnidæmi

Leysið fyrir x

$$\left| 15 - \frac{2}{x} \right| < 7$$

Sýnidæmi

Leysa ójöfnuna og teikna upp lausnarmengi hennar

$$-16 < -3x + 1 < 64$$

Stofnbrotisliðun

Stofnbrotisliðun *e. Partial fractions* felst í því að liða í sundur almennbrot með óþekktum stærðum.

Stofnbrotslíðun

Stofnbrotslíðun *e. Partial fractions* felst í því að liða í sundur almennbrot með óþekktum stærðum.

Til hvers?

Sýnidæmi

Stofnbrotslíðið

$$f(x) = \frac{8x}{x(x+1)(x+2)}$$

Sýnidæmi

Stofnbrotliðið

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^3 + 4x^2 + 4x}$$

Leysið fyrir x :

$$1. \left| 8 + \frac{2}{x} \right| < 15$$

$$2. \left| \frac{x+2}{3} - 5 \right| < 4$$

$$3. \left| \frac{1}{3-x} + \frac{2}{5} \right| < 8$$

Stofnbrotgliðið eftirfarandi brot:

$$1. \frac{2}{x(2x+1)}$$

$$2. \frac{x-1}{x^2(x+1)}$$

$$3. \frac{4x^2 - x - 1}{(x+1)^2(x-3)}$$