Reiknireglur í Algebru

Kristbjörg Anna Þórarinsdóttir

6. ágúst 2015

1 Algildi

Algildi af tölu x, $|x|$, er jákvæða gildi tölunnar án tillits til formerkis.
Við skilgreinum algildi tölu x, táknað með $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ef } x \geq 0 \\ -x & \text{ef } x < 0 \end{cases}$$

Tafla 1: Reiknireglur um algildi

$\|x\|$	$=$	$\sqrt{x^2}$
$\|x\|$	$\geq$	0
$\|xy\|$	$=$	$\|x\|\|y\|$
$\|x+y\|$	$\leq$	$\|x\| + \|y\|$

2 Veldi og rætur

Tafla 2: Reiknireglur um veldi

$x^m x^n$	$=$	x^{m+n}
$\frac{x^m}{x^n}$	$=$	x^{m-n}
$(xy)^n$	$=$	$x^n y^n$
$\left(\frac{x}{y}\right)^n$	$=$	$\frac{x^n}{y^n}$
$(x^m)^n$	$=$	x^{mn}

Dæmi. Notið reglur um vísisföll til þess að einfalda stæðuna

$$5^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$$

Lausn. Getum tekið veldið út fyrir sviga

$$(6 \cdot 5)^{\frac{2}{3}} = 30^{\frac{2}{3}}$$

Dæmi. Notið reglur um vísisföll til þess að einfalda stæðuna

$$3^4 \cdot 3^2$$

Lausn. Tökum sameiginlega þætti út fyrir sviga

$$3^{4+2} = 3^6$$

Tafla 3: Reiknireglur um rætur

$\sqrt{x}$	$=$	$x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$=$	$x^{-\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{x}$	$=$	$x^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[x]{a^y}$	$=$	$a^{\frac{y}{x}}$

3 Vigrar

Vigrar hafa stærð og stefnu.

Vigur í $\mathbb{R}^2$ hefur tvö hnit og táknar punkt í sléttunni $\mathbb{R}^2$. Ef vigur $\mathbf{v}$ hefur hnitin x og y þá ritum við

$$\mathbf{v} = (x, y) \quad \text{eða} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vigrar hafa stærð og stefnu. T.d. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ eða $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

Stærð vigra

Einnig nefnd lengd vigra, er fundin með Pýþagórasarreglunni

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Er lengdin þá

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Samlagning vigra

fæst með því að leggja saman x og y hnit vigrana.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

Samlagning vigranna

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\mathbf{e_x} + \left(a_y + b_y\right)\mathbf{e_y} + (a_z + b_z)\,\mathbf{e_z}$$

Innfeldi vigra

Einnig kallað depilmargfeldi.

Innfeldi vigrana

$$\mathbf{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

$$\mathbf{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$$

er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)$$

Jafngild skilgreining er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\theta)$$

Ef innfeldi tveggja vigra er núll, þá er annað hvort báðir eða annar vigurinn núll vigur eða þeir eru hornréttir hvor á annan.

Dæmi. Finna $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = (3, 2, 1)$$

$$\mathbf{b} = (-4, 5, 2)$$

Lausn.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = -12 + 12 = 0$$

$\rightarrow$ Vigrarnir eru hornréttir.

Dæmi. Finna horn milli vigranna

$$\mathbf{a} = (2, 7, 1)$$

$$\mathbf{b} = (1, 5, 3)$$

Lausn.

$$a \cdot b = |a||b| \cos(\theta)$$

$$\frac{a \cdot b}{|a||b|} = \cos(\theta)$$

$$|a| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{54}$$

$$|b| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{40}{\sqrt{54}\sqrt{35}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{27 * 35}}\right) = 50^\circ$$

Krossfeldi vigra

er táknað með $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
a_x	a_y	a_z
b_x	b_y	b_z

Þá er

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \mathbf{j}\left(a_x b_z - a_z b_x\right) + \mathbf{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

Þumallinn í hægrihandareglunni segir til um stefnu krossfeldisins.

Dæmi. Finna horn sem $a \times b$ myndar við x-ás.

$$\mathbf{a} = \hat{\imath} + 2\hat{k} + 3\hat{k}$$

$$\mathbf{b} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

Lausn.

$$(12-18)i-(6-9)j+(6-6)k=-6i+3j$$

Höfum fundið krossmargfeldið, hornið sem vigurinn myndar við x-ás er fundinn með hornafalla reglu.

cos	sin	tan
$\frac{a}{l}$	$\frac{m}{l}$	$\frac{m}{a}$

Viljum fá móthlið (y) deilt með aðlæg hlið (x)

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{-6}\right)=-26^\circ$$

Dæmi. Finnum krossmargfeldi vigrana $\mathbf{a}=(1,0,0)\,,\mathbf{b}=(0,1,0)$

Lausn. **a** er einingavigur í x-stefnu og **b** í y-stefnu. Og samkvæmt hægrihanda reglu ætti það að gefa vigur í z-stefnu.

i	**j**	**k**
1	0	0
0	1	0

sem gefur

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-\mathbf{j}\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\mathbf{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)$$

$$=\mathbf{i}\left(0\cdot0-0\cdot1\right)-\mathbf{j}\left(1\cdot0-0\cdot0\right)+\mathbf{k}\left(1\cdot1-0\cdot0\right)=\mathbf{k}$$

Ofanvarp

vigursins **u** á vigurinn **w** er með $prod_u w$.

Dæmi. Höfum vigurinn **v** af lengd 300 sem myndar 40° horn við x-ásinn. Finndu ofanvarp við x og y-ás.

Lausn. Rifjum upp regluna

cos	sin	tan
$\frac{a}{l}$	$\frac{m}{l}$	$\frac{m}{a}$

Sjáum að til að finna ofanvarp á x-ásinn notum við

$$\cos\left(\theta\right)=a/l$$

og á y-ásin

$$\sin\left(\theta\right)=m/l$$

sem gefur

$$\cos\left(40^\circ\right)\cdot300=193$$

$$\sin\left(40^\circ\right)\cdot300=230$$

4 Jöfnur

Fyrsta stigs margliða

er á forminu

$$Ax + B = 0$$

Þessi jafna er bein lína og er betur þekkt á forminu

$$(y - y_0) = h\,(x - x_0)$$

sem er jafna línu og h er hallatala hennar.

Dæmi. Finnið hallatölur eftirfarandi lína og skurðpunkta þeirra við y-ás.

a) $y = 8x - 2$

b) $y = \frac{1}{3}x$

c) $3x + 4y - 3 = 0$

Lausn. Hallatala línunnar er stuðullinn sem stendur við x.
Skurðpunktur við y-ás er fundinn með því að setja $x = 0$ og leysa út fyrir y
Skurðpunktur við x-ás er fundinn með því að setja $y = 0$ og leysa út fyrir x

a) Hallatala: 8, Skurðpunktur: $y = 8 \cdot 0 - 2 \Rightarrow y = -2$

b) Hallatala: $\frac{1}{3}$, Skurðpunktur: $y = \frac{1}{3} \cdot x \Rightarrow y = 0$

c) Einangrum x og y sitthvoru megin við jafnaðar merkið.

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

Hallatala: $-\frac{3}{4}$, Skurðpunktur: $-\frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}$

Dæmi. Finndu jöfnu línu sem er hornrétt á

$$y = 8x - 5$$

Lausn. Hornrétt lína er fundin með því að reikna nýja hallatölu Formúla fyrir hallatölulínu sem er hornrétt á aðralínu er

$$h_1 = -\frac{1}{h_2}$$

Jafna línunnar sem er hornrétt á $y = 8x - 5$ er

$$y = -\frac{1}{8} - 5$$

Annars stigs margliða

er á forminu

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

, $A \neq 0$ og A,B,C eru rauntölur, nefnast stuðlar. Almenn lausn hennar er

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{1}$$

Ferillinn sem markar jöfnuna nefnist fleygbogi og hefur mest ein beygjuskil, þar að leiðandi mest tvær rætur.

$$D = \sqrt{B^2 - 4AC}$$

er oft kallaður D-liður. Hann segir til um hversu margar rætur margliðan hefur.

D > 0	Margliðan hefur tvær mismunandi rauntalna lausnir
D $= 0$	Margliðan hefur eina tvöfalda rauntalna lausn
D < 0	Lausn margliðunnar er á tvinntalna planinu

Dæmi. Finnið rætur margliðunnar

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Lausn. Stingum inn í jöfnu (**??**) og fáum

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

Dæmi. Finnið rætur margliðunnar

$$2x^2 + 5x2 = 0$$

Lausn. Stingum inn í jöfnu (**??**) og fáum

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

Dæmi.

$$\frac{3x^2 - 3}{2y} = \frac{(x+1)(x-1)}{y^2 + 1}$$

Lausn. Tökum sameiginlegan þátt út fyrir sviga

$$\frac{3\left(x^2 - 1\right)}{2y} = \frac{(x+1)(x-1)}{y^2 + 1}$$

umritum $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$

$$\frac{3(x+1)(x-1)}{2y} = \frac{(x+1)(x-1)}{y^2 + 1}$$

Styttum út

$$\frac{3}{2y} = \frac{1}{y^2+1}$$

$$3 \cdot \left(y^2+1\right) = 2y$$

$$3y^2 - 2y + 3 = 0$$

Stingum nú inn í jöfnu (**??**)

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-36}}{6} = \frac{1 \pm 16i}{3}$$

Þriðjastigs margliða

er á forminu

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Almenn lausn hennar er löng og flókin og ekki er ætlast til þess að nemandi noti hana. Ræturnar má þó finna með þáttun.

Dæmi.

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 24 = 0$$

Lausn. Þáttum yfir í tvo liði

$$(x-4)\left(x^2+6\right) = 0$$

$$(x-4) \ = 0$$

Hefur eina rauntalna núll stöð $x = 4$

$$\left(x^2+6\right) = 0$$

Hefur tvöfalda núllstöð $x = \pm\sqrt{-6} = \pm 6i$

Fjórðastigs margliða

er á forminu

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

Almennlausn er löng og flókin líkt og með þriðjastigs margliður. Fjórðastigs margliður eru oft dulnar annars stigs margliður.

Dæmi.

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

Lausn. Byrjum á því að þátta

$$x^2\left(x^2-2\right)$$

Sjáum strax að ein núllstöðin er $x = 0$ Leysum úr jöfnunni

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Fimmtastigs margliður

Árið 1826 sannaði Niels Henrik Abel að ekki er til almenn lausn á margliðum af stigi fimm eða hærra.

5 Tvinntölur

Setning 5.1. *Tvinntala (e.complex number) er tala sem er hægt að rita*

$$z = x + yi$$

þar sem x og y eru rauntölur og$i$ er ímyndaður hluti. Uppfyllir jöfnuna

$$i^2 = -1$$

.

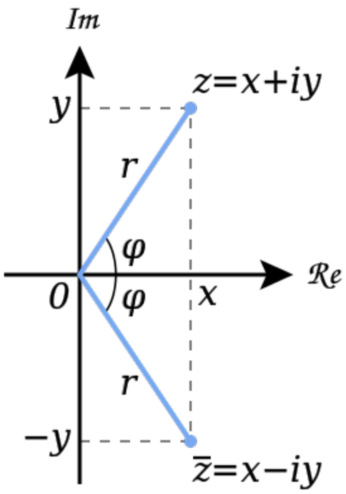
Ritháttur

Notast er við bæði i og j þegar talað er um tvinntölur, hér notast ég eingöngu við i. Í rafmagnsfræði og rafsegulfræði er frekar notast við j þar sem i oft táknar straum.
Raunhluti tvinntölu er tánknaður

$$Re(z) = Re(x + yi) = x$$

Ímyndaði hluti hennar

$$Im(z) = Im(x + yi) = y$$



Tvinntalna planið

Hægt er að líta á tvinntölu sem skalar eða vigur í tvívíðu kartesísku hnitakerfi kallað tvinntalnaplanið.

Samokatalan

er táknuð með yfirstriki $\overline{z}$ eða stjörnu z^*. Ef samoka er beitt á tvinntölu þá breytist formerki i en formerki rauntalnanna helst óbreytt.

$x, y \in \mathbb{R}$ og $z, w \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
\overline{i} &= -i \\
\overline{x+yi} &= x-yi \\
\overline{zw} &= \overline{z}\overline{w} \\
\overline{z+w} &= \overline{z}+\overline{w} \\
\overline{z-w} &= \overline{z}-\overline{w} \\
\overline{(z/w)} &= \overline{z}/\overline{w}
\end{aligned}
$$

Deiling tvinntölu

Þegar deila skal með tvinntölum er margfaldað með samoka nefnarans í nefnara og teljara.

$$\frac{v+wi}{x+yi} \cdot \frac{\overline{x+yi}}{\overline{x+yi}}$$

Dæmi. Leysum dæmið

$$\frac{2+3i}{5+6i}$$

Lausn. Fyrsta skref er að margfalda samoka nefnarans með nefnara og teljara.

$$\frac{2+3i}{5+6i} \cdot \frac{5-6i}{5-6i} = \frac{(2+3i)\cdot(5-6i)}{25+30i-30i-36i^2}$$

Vitum að $i^2 = -1$

$$\frac{10-12i+15i-18i^2}{61} = \frac{28+3i}{61}$$

Lengd tvinntölu

Til að finna lengd á tvinntölu (*e. absolute value*) er Pýþagóras notaður. Munum að $z = x + yi$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Dæmi. Finnið lengd vigursins

$$\mathbf{z} = 7 + 5i$$

Lausn.

$$|z| = \sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{74}$$

6 Ójöfnur

Þegar við skrifum jafnaðarmerki ($=$) milli tveggja stærða í stærðfræði meinum við að þessar tvær stærðir séu nákvæmlega hinar sömu. Þetta þýðir að ef við beitum einhverri aðgerð á aðra stærðina, þá kemur það sama út við að beita sömu aðgerð á hina stærðina. Ef a og b eru einhverjar tölur og $a = b$, þá er $a + 1 = b + 1$, $5a = 5b$ og $a^2 = b^2$.

Ef við prófum að draga b frá báðum stærðum a og b, þá fáum við jöfnuna $a - b = b - b = 0$. Þetta er stundum orðað svoleiðis að við höfum *fært b yfir jafnaðarmerkið* og þá „breytist“ plús í mínus. Ef við erum viss um að b sé ekki 0 (og þar með $a \neq 0$), þá getum við líka fært b yfir jafnaðarmerkið á annan hátt: $a/b = b/b = 1$. Þá höfum við deilt með b beggja vegna jafnaðarmerkisins og þannig „breytt“ margföldun í deilingu.

Orðalagið „að færa yfir jafnaðarmerki“ getur stundum verið ruglandi og fólki er hætt við að gleyma hvaða reglum það þarf að fylgja við þann verknað. Réttast er að hafa alltaf í huga að raunverulega erum við ekki að færa neitt yfir nokkuð, heldur erum við að beita sömu aðgerð á tvo hluti sem við vitum að eru eins, m.ö.o. beitum við sömu aðgerð beggja vegna jafnaðarmerkisins.

Við notum svipaða hugsun þegar við vinnum með ójöfnur, en þó verðum við að sýna meiri aðgát. Vissulega ef a er minna en b, þá er bæði $a + 1$ minna en $b + 1$ og $5a$ minna en $5b$. Við höfum líka að $a - b < b - b = 0$, en er víst að $a/b < 1$? Svo er ekki. Tökum dæmi.

Dæmi. Við vitum að $2 < 100$. Ef við drögum 100 frá báðum hliðum fáum við út að $-98 < 0$, sem er líka rétt. Ef við deilum báðum hliðum með 100, þá fáum við að $2/100 = 1/50 < 1$ og enn virðist allt með felldu. Reynum það sama á ójöfnuna $-100 < -2$. Ef við drögum -2 frá báðum hliðum, eða réttara sagt bætum 2 við báðar hliðar, þá fáum við $-98 < 0$. Ef við hins vegar deilum báðum hliðum með -2, þá fáum við út að

$$\frac{-100}{-2} < \frac{-2}{-2}$$

sem jafngildir

$$50 < 1$$

og er algjör della.

Ef við við höfum tvær tölur x og y þannig að

$$x < y$$

þá getum við dregið x frá hvoru megin ójafnaðarmerkisins:

$$x - x < y - x$$

$$0 < y - x$$

Svo getum við dregið y frá hvoru megin:

$$0 - y < y - x - y$$

$$-y < -x$$

Nú höfum við ójöfnu þar sem stærðirnar x og y koma fyrir með öfugu formerki en áður. Það er eins og við höfum margfaldað upphaflegu ójöfnuna með -1 og snúið ójöfnumerkinu við. Reglan sú er að ef við viljum margfalda báðar hliðar ójöfnu með neikvæðri tölu, þá þurfum við að snúa ójöfnumerkinu við. Merkinu gleymdist að snúa við í dæminu hér að ofan, sem er ástæðan fyrir því að við lentum í klemmu.

Við lendum einnig í vandræðum ef við margföldum stranga ójöfnu með núlli: $a < b$ verður þá $0a < 0b$ sem jafngildir $0 < 0$, en 0 getur ekki verið minna en 0 því 0=0. Það er því ekki hægt að margfalda stranga ójöfnu með núlli, enda höfum við sjaldan ríka ástæðu til þess að gera það.

$$\begin{array}{lcl}
|x| = D & \Rrightarrow & \text{annað hvort } x = -D \text{ eða } x = D \\
|x| = D & \Rrightarrow & -D < x < D \\
|x| \leq D & \Rrightarrow & -D \leq x \leq D \\
|x| > D & \Rrightarrow & \text{annað hvort } x < -D \text{ eða } x > D
\end{array}$$

Almennar

$$\begin{array}{lcl}
|x - a| = D & \Rrightarrow & \text{annað hvort } x = a - D \text{ eða } x = a + D \\
|x - a| = D & \Rrightarrow & a - D < x < a + D \\
|x - a| \leq D & \Rrightarrow & a - D \leq x \leq a + D \\
|x - a| > D & \Rrightarrow & \text{annað hvort } x < a - D \text{ eða } x > a + D
\end{array}$$

Dæmi.

$$\left|15 - \frac{2}{x}\right| < 7$$

Lausn.

$$-7 < 15 - \frac{2}{x} < 7$$

$$-7 - 15 < 15 - \frac{2}{x} - 15 < 7 - 15$$

$$-22 < -\frac{2}{x} < -8$$

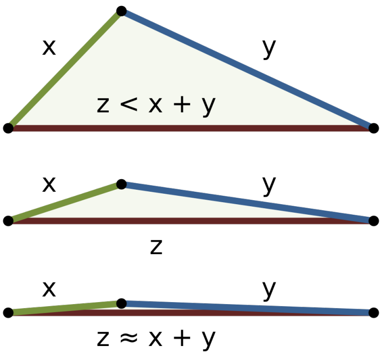
$$11 > \frac{1}{x} > 4$$

$$\frac{1}{11} < x < \frac{1}{4}$$

Þríhyrnings ójafnan

Þessi jafna kemur fyrir á mörgum stöðum í stærðfræði. En hún þýðir það að ef þú hefur þríhyrning þá getur ein hliðin ekki verið lengri en summa tveggja hliða í þríhyrningnum.

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$


x
y
z < x + y
x
y
z
x
y
z ≈ x + y

7 Stofnbrotsliðun

Stofnbrotsliðun *e. Partial fractions* felst í því að liða í sundur almennbrot með óþekktum stærðum.

Dæmi. Stofnbrotsliðið

$$P(x) = \frac{8x}{x\,(x+1)\,(x+2)}$$

Lausn. Byrjum á að skoða sameiginlega þætti og sjáum að við getum stytt út x í nefnara og teljara. Setjum dæmið upp

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{8}{(x+1)\,(x+2)}$$

Viljum leysta út fyrir A og B, fáum út jöfnuhneppi.

$$A\,(x+2) + B\,(x+1) = 8$$

Margföldum upp úr svigunum og fáum

$$Ax + 2A + Bx + B = 8$$

Tökum saman svipaða liði

$$(A+B)x + (2A+B) = 8$$

Sjáum að hægri hlið jöfnunnar inniheldur ekkert x svo

$$(A+B)x = 0$$
$$2A + B = 8$$

Svo að svo jafna 1) gangi upp þarf $A = -B$ stingum því inn í 2)

$$2A - A = 8 \Rightarrow A = 8$$

þá fæst að

$$B = -8$$

Höfum þá að

$$P(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{8}{x+2} - \frac{8}{x+1}$$

Hægt að staðfesta að reikningar séu réttir með því að reikna upp úr liðunum.

Dæmi. Stofnbrotsliðið

$$P(x) = \frac{x+1}{x^3 + 5x^2 + 6x}$$

Lausn. Fyrsta skrefið er að liða þáttinn í nefnara. Sjáum að x er sameiginlegur þáttur allra og tökum hann út fyrir sviga.

$$\frac{x+1}{x\,(x^2 + 5x + 6)}$$

Glöggur nemandi sér nú að hægt er að þátta liðinn í nefnara í $(x+3)(x+2)$ en það er einnig hægt að nota reglu (**??**) til að þátta.

$$\frac{x+1}{x\left(x+3\right)\left(x+2\right)}$$

Setjum upp

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}=\frac{x+1}{x\left(x+3\right)\left(x+2\right)}$$

$$A\left(x+3\right)\left(x+2\right)+Bx\left(x+3\right)+Cx\left(x+2\right)=x+1$$

Margföldum upp úr svigunum og tökum saman líka liði

$$Ax^2+5Ax+6A+Bx^2+3Bx+Cx^2+2Cx=x+1$$

$$\left(A+B+C\right)x^2+\left(5A+3B+2C\right)x+6A=1+x$$

Berum saman liði í jöfnunni og fáum jöfnuhneppi

$$A+B+C=0$$

$$5A+3B+2C=1$$

$$6A=1$$

Úr því fæst strax að $A=1/6$ Úr jöfnu 1) fæst svo $B=-C-A\Rightarrow B=-C-1/6$ Stingum þessu inní jöfnu 2)

$$\frac{5}{6}+3\left(-C-\frac{1}{6}\right)+2C=1$$

$$\frac{5}{6}-3C-\frac{3}{6}+2C=1$$

Eingangrum C

$$C=-\frac{5}{6}+\frac{3}{6}+1$$

$$C=-\frac{2}{3}$$

Þá fæst að $B=\frac{1}{2}$
Lausnin er þá

$$P(x)=\frac{\frac{1}{6}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}-\frac{\frac{2}{3}}{x+3}$$

Dæmi.