Inngangur að stærðfræðigreiningu

Pétur Rafn Bryde*

7. ágúst 2015

1 Markgildi og samfelldni

Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil sem inniheldur töluna a, og látum $f\colon I \to \mathbb{R}$ vera fall á bilinu. Í stærðfræðigreiningu höfum við oft áhuga á því að vita hvort $f(x)$ nálgist einhverja ákveðna tölu L þegar x nálgast a. Ef svo er, þá segjum við að $f(x)$ *hafi markgildið L þegar x stefnir á a* og táknum það

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{eða} \quad f(x) \to L \text{ þegar } x \to a.$$

Fyrsta verkefnið okkar er að skilgreina þetta hugtak nákvæmlega.

Skilgreining (Markgildi)**.** Við segjum að $f(x)$ hafi markgildið L þegar x stefnir á a ef að fyrir sérhverja jákvæða tölu $\epsilon > 0$ má finna jákvæða tölu $\delta > 0$ þannig að fyrir öll x á bilinu $(a-\delta, a+\delta)$ nema hugsanlega a þá er munurinn milli $f(x)$ og L minni en ϵ:

$$\text{ef } 0 < |x-a| < \delta, \text{ þá er } \bigl|f(x) - L\bigr| < \epsilon.$$

Ef það er ekki til neitt L sem uppfyllir þetta skilyrði þá segjum við að markgildið sé ekki til, eða að f hafi ekki markgildi í punktinum a. Þetta getur til dæmis gerst ef f tekur stökk í punktinum a, ef f sveiflast ört í grennd við a, eða ef það stækkar upp úr öllu valdi. Í síðara tilfellinu segjum við stundum að fallið *stefni á óendanlegt* og táknum það $f(x) \to \infty$.

Dæmi. Látum $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Þá gildir $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Til að sýna þetta, þá látum við $\epsilon > 0$ vera gefið. Við þurfum að finna δ til þess að tryggja að $\bigl|f(x)\bigr| < \epsilon$ ef $0 < |x| < \delta$. Eftir smá umhugsun sjáum við að það nægir að velja $\delta = \sqrt{\epsilon}$, því þá fæst fyrir $x < \delta$:

$$\bigl|f(x)\bigr| < \bigl|f(\delta)\bigr| = \delta^2 = \epsilon.$$

Við skilgreinum *hægra markgildi* fallsins f, táknað $\lim_{x\to a^+} f(x)$ á svipaðan hátt, en þá þarf bara að gilda $\bigl|f(x) - L\bigr| < \epsilon$ fyrir $x \in (a, a+\delta)$. Við skilgreinum *vinstra markgildið* á hliðstæðan hátt. Ef að fallið hefur bæði vinstra og hægra markgildi í a, *og markgildin tvö eru jöfn*, þá hefur fallið markgildi í a.

Dæmigert verkefni er að finna markgildi falls í tilteknum punkti, ef það er til. Slíkt dæmi er venjulega leyst í tveimur hlutum: Í fyrsta lagi þarf að skoða

*Fyrirlestur saminn fyrir Verkfræði- og raunvísindasvið Háskóla Íslands. Vinsamlegast sendið allar ábendingar og leiðréttingar til `prb1@hi.is`.

fallið og *finna tölu* sem kemur til greina sem markgildi fallsins, eða *sannfæra sig* um að slík tala sé ekki til. Þá getur hjálpað að teikna upp fallið á bili sem inniheldur punktinn, eða umrita formúlu fallsins á lýsandi hátt. Í öðru lagi þarf að *sanna* að talan sé markgildi fallsins (eða að markgildið sé ekki til). Ein leið til þess er svokölluð *epsilon-delta-sönnun* eins og í síðasta dæmi, þar sem fundið er δ fyrir gefið ϵ. Þessi tegund af sönnun er oft tímafrek og er aðallega notuð til að sanna almennar markgildisreglur eins og í næsta dæmi.

Dæmi. Látum f og g vera tvö raunföll á $\mathbb{R}$. Gerum ráð fyrir að $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Sýnið að þá gildir samlagningarreglan:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L + M.$$

Lausn. Látum $\epsilon > 0$ vera gefið. Samkvæmt forsendum gildir að fyrir sérhvert $\epsilon_1 > 0$ þá er til $\delta_1 > 0$ þannig að ef $|x-a| < \delta_1$ þá er $\left|f(x) - L\right| < \epsilon_1$. Eins gildir fyrir fallið g að fyrir $\epsilon_2 > 0$ er til $\delta_2 > 0$ þannig að ef $|x-a| < \delta_2$ þá er $\left|g(x) - M\right| < \epsilon_2$. Látum δ vera minni töluna af δ_1 og δ_2, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Þá gildir bæði $\left|f(x) - L\right| < \epsilon_1$ og $\left|g(x) - M\right| < \epsilon_2$ ef $|x-a| < \delta$, og þá er

$$\begin{aligned}\left|(f+g)(x) - (L+M)\right| &= \left|(f(x) - L) + (g(x) - M)\right| \\ &\le \left|f(x) - L\right| + \left|g(x) - M\right| < \epsilon_1 + \epsilon_2.\end{aligned}$$

Hér notuðum við þríhyrningsójöfnuna í öðru skrefi. Munum að við megum velja ϵ_1 og ϵ_2 eins lítil og við viljum svo lengi sem þau eru stærri en 0. Veljum $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$. Þá fæst $\left|(f+g)(x) - (L+M)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ ef $|x-a| < \delta$. Þar með er reglan sönnuð.

Helstu markgildisreglur eru eftirfarandi:

Setning 1.1 (Markgildisreglur)**.** *Látum f og g vera raunföll á bili I sem inniheldur punktinn a. Ef $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$ þá gildir:*

1. Samlagningarregla:
$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = L \pm M.$$

2. Margföldunarregla:
$$\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = L \cdot M.$$

3. Deilingarregla:
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}, \quad \text{ef } M \neq 0.$$

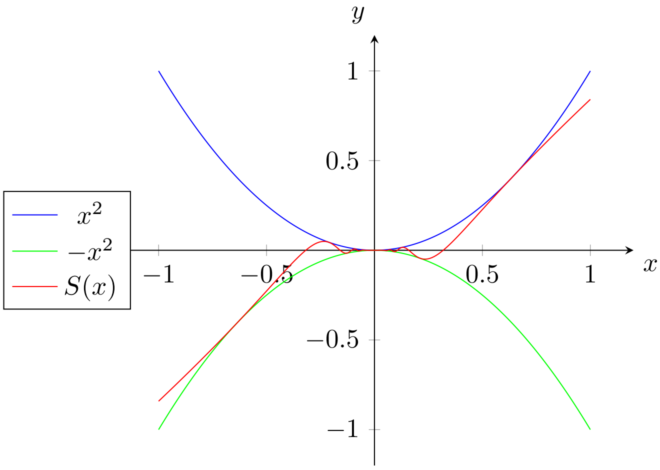
4. Veldisregla: *Ef $m, n \in \mathbb{N}$ þá gildir:*
$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^{(m/n)} = L^{m/n}.$$
Ef n er slétt þá verður L að vera jákvætt, og ef $m < 0$ þá má L ekki vera 0.

Við þessar reiknireglur bætast tvær örlítið flóknari aðferðir til þess að finna markgildi: *Klemmureglan* sem við fjöllum um næst, og *Regla l'Hôpitals* sem verður að bíða þar til við höfum talað um diffrun.

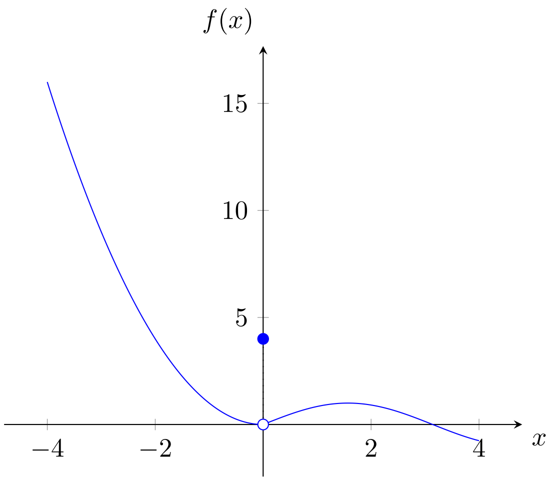
Setning 1.2 (Klemmuregla)**.** *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil sem inniheldur a og látum f, g og h vera föll á $\mathbb{R}$ þannig að $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ fyrir öll $x \in I$ nema hugsanlega a. Gefum okkur að $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$. Þá gildir*

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Dæmi. Finnum markgildi fallsins $S(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ í punktinum 0. Með því að teikna fallið sjáum við að það virðist nálgast 0 þegar $x \to 0$. En hvernig sönnum við það? Við getum ekki notað margföldunarregluna $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$ því $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hefur ekki markgildi þegar $x \to 0$ (það sveiflast óendanlega oft milli -1 og 1 á sérhverju bili sem inniheldur núllpunktinn). Við notfærum okkur að $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ og því gildir einnig $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$. Því er gildi fallsins S klemmt á milli gilda $-x^2$ og x^2, og markgildið er 0 samkvæmt keðjureglunni.



Mikilvægt er að athuga að markgildi fallsins f í punkti a hefur ekkert að gera með gildi fallsins í punktinum, $f(a)$!



Mynd 1: Markgildi fallsins f í $x = 0$ er 0, burtséð frá gildi fallsins í punktinum.

Ef fallið f hefur markgildi í a og $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, þá segjum við að fallið sé *samfellt* í punktinum a. Samfelld föll hafa marga æskilega eiginleika. Þau eru til dæmis *heildanleg*, og þau taka *hæsta og lægsta gildi* á sérhverju lokuðu bili. Þau uppfylla einnig milligildissetningu: Ef $f : I \to \mathbb{R}$ er samfellt á lokaða bilinu $I = [a, b]$ þá tekur f öll gildi milli $f(a)$ og $f(b)$. Með því að nota markgildisreglurnar er hægt að sanna eftirfarandi reglur um samfelld föll:

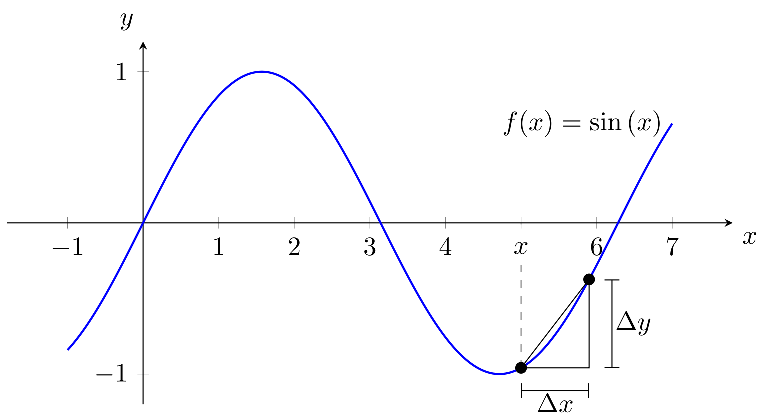
Setning 1.3 (Samfelld föll)**.** *Látum f og g vera raunföll á bili I og samfelld í punktinum $a \in I$. þá gildir:*

1. *Fallið $f + g$ er samfellt í a.*
2. *Fallið $f \cdot g$ er samfellt í a.*
3. *Fallið $\frac{f}{g}$ er samfellt í a ef $g(a) \neq 0$.*
4. *Látum nú $f(a) = y$ og látum fallið h vera samfellt í y. Þá er fallið $h \circ f$, gefið með $(h \circ f)(x) = h(f(x))$, samfellt í a.*

Af þessum reglum leiðir að *margliður eru samfelldar alls staðar á* $\mathbb{R}$, og *ræð föll eru samfelld þar sem nefnarinn er ekki* 0. Fall sem er samfellt á öllu formengi sínu köllum við *samfellt*. Mengi samfelldra falla á bilinu I táknum við með $\mathcal{C}(I)$. Nokkur mikilvæg dæmi um samfelld föll eru exp, ln, sin og cos.

2 Diffranleiki og afleiður

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall og látum $a \in I$. Graf fallsins f sker þá punktinn $(a, f(a)$. Það er algengt vandamál í stærðfræði að ákvarða hvort hægt sé að mynda *snertil* við graf f í a, og ef svo er, að finna halla snertilsins. Ef það er hægt, þá köllum við halla snertilsins *afleiðu* fallsins í a. Á mynd 2 er sýnd ein leið til þess að meta afleiðu falls. Við sjáum að í þessu tilfelli fáum við sífellt betri nálgun á afleiðuna eftir því sem Δx er valið minna.



Mynd 2: Mat á afleiðu sin með mismunakvóta.

Þetta leiðir okkur að eftirfarandi skilgreiningu:

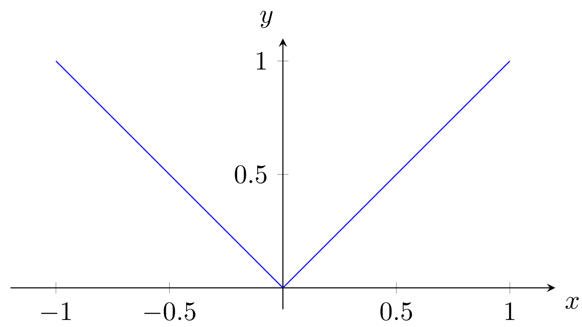
Skilgreining (Afleiða)**.** Ef markgildið

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

er til, þá segjum við að f sé diffranlegt í a með afleiðu L. Við táknum afleiðu f í punktinum a með $f'(a)$ eða $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}$.

Til þess að fall f hafi afleiðu í punkti a þá þarf fallið að vera samfellt í punktinum (*nauðsynlegt skilyrði*). Það er hins vegar ekki nóg: Fallið þarf líka að vera nægjanlega „slétt“, það er, halli þess má ekki breytast of ört nálægt punktinum.

Dæmi. Hvar er fallið $g(x) = |x|$ diffranlegt? Athugum að fyrir $x > 0$ er fallið einfaldlega margliðan $g(x) = x$ sem er alls staðar diffranleg með afleiðu 1. Fyrir $x < 0$ er $g(x) = -x$ með afleiðu -1. Því hefur stærðin $\frac{g(h)-g(0)}{h}$ markgildið $+1$ þegar h stefnir á 0 frá hægri, og markgildið -1 frá vinstri. Markgildið er því ekki til og g hefur ekki afleiðu í $x = 0$.



Við kynntum afleiðuna til sögunnar sem hallann á grafi falls. Það er til önnur einföld túlkun á afleiðunni sem allir þekkja úr daglegu lífi: Þegar þú keyrir bíl getur þú skilgreint fall $s(t)$ sem gefur staðsetningu þína fyrir gefinn tíma t. Ef þú diffrar þetta fall með tilliti til tíma þá færðu *hraða* bifreiðarinnar: $v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Afleiða falls gefur *vaxtarhraða* þess.

2.1 Afleiðan sem fall

Ef fallið $f\colon I \to \mathbb{R}$ er diffranlegt alls staðar á formengi sínu þá segjum við einfaldlega að f sé *diffranlegt.* Við getum þá skilgreint nýtt fall

$$f'\colon I \to \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Nú er hægt að spyrja sig hvort þetta nýja fall sé samfellt. Ef svo er, þá segjum við að upprunalega fallið f sé *samfellt diffranlegt.* Við táknum mengi samfellt diffranlegra falla með $\mathcal{C}^1(I)$. Ef $f \in \mathcal{C}^1(I)$ þá er ef til vill hægt að diffra það aftur. Fallið sem þá fæst köllum við *aðra afleiðu* f, táknað með f'' eða $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$. Þannig skilgreinum við n-tu afleiðuna $f^{(n)}$ og mengi n sinnum samfellt diffranlegra falla $\mathcal{C}^n(I)$.

Dæmi. Reiknið afleiðu fallsins $f(x) = x^2$ í punktinum $x = 3$. Finnið einnig fallið f'.

Lausn. Byrjum á því að reikna afleiðuna í a:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3^2 + 2 \cdot 3h + h^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h + h^2}{h} \end{aligned}$$

2.2 Reiknireglur fyrir diffrun

Það er oftast tímafrekt að reikna út afleiður með því að nota markgildisskilgreininguna að ofan. Við notum hana frekar til þess að *sanna almennar reiknireglur* um diffrun, rétt eins og við notum epsilon-delta-skilgreiningu markgildis til þess að sanna almennar reiknireglur fyrir markgildi. Helstu reglur um diffrun eru eftirfarandi:

Setning 2.1 (Reiknireglur fyrir diffrun)**.**

1. *Fastafallið $x \mapsto c$ þar sem $c \in \mathbb{R}$ er alls staðar diffranlegt með afleiðu* 0.
2. *Afleiða fallsins $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$ þar sem $r \in \mathbb{R}$ er $f'(x) = rx^{r-1}$* hvar sem þetta fall er skilgreint.[1]

Látum f og g vera diffranleg föll á $I \subset \mathbb{R}$. Þá eru föllin $f + g$, $f \cdot g$, og αf (þar sem $\alpha \in \mathbb{R}$) diffranleg á I. Fallið $\frac{f}{g}$ er diffranlegt í þeim punktum x þar sem $g(x) \neq 0$. Afleiður þeirra eru gefnar með eftirfarandi reglum:

3. Samlagningarregla:
$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$
4. Margföldunarregla:
$$(fg)' = f'g + fg'.$$
5. Deilingarregla:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Látum nú $U \subset \mathbb{R}$ vera bil og $h \colon U \to I$ vera diffranlegt fall á U. Samskeytingin $g \circ h$ er þá diffranleg á U, og afleiðan er gefin með:

6. Keðjuregla:
$$(f \circ h)'(a) = f'(h(a)) \cdot h'(a).$$

[1]Sem dæmi þá er $g(x) = x^2$ alls staðar diffranlegt með afleiðu $g'(x) = 2x$ en fallið $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ er aðeins diffranlegt þar sem $x > 0$ og þar er afleiðan $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Eftir fylgja afleiður nokkurra mikilvægra falla.

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x &= e^x, & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x &= \ln(a) a^x, \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) &= \frac{1}{x}, & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a(x) &= \frac{1}{x \ln(a)}, \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) &= \cos(x), & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(x) &= -\sin(x), \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh(x) &= \cosh(x), & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh(x) &= \sinh(x).
\end{aligned}$$

Dæmi. Finnið afleiðu eftirfarandi falla:

(a) $a(x) = 3x^2 - x + 5$

(b) $b(x) = x^2 e^x$

(c) $c(x) = \tan(x)$

(d) $d(x) = e^{2\sin(x)\cos(x)}$

(e) $e(x) = x^x$.

Lausn.

(a) Notum summuregluna:

$$a'(x) = 6x - 1$$

(b) Notum margföldunarregluna:

$$b'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$$

(c) Athugum að $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ og notum deilingarregluna:

$$\begin{aligned}
c'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

(d) Athugum fyrst að $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, og notum keðjuregluna. Skilgreinum hjálparföllin u og v þannig:

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^x, & v(x) &= \sin(2x), \\
u'(x) &= e^x, & v'(x) &= 2\cos(2x).
\end{aligned}$$

Þá er $h(x) = (u \circ v)(x)$ og afleiðan er

$$d'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = e^{\sin(2x)} \cdot 2\cos(2x)$$

(e) Við notum aðferð sem kallast *fólgin diffrun.* Tökum logrann af báðum hliðum: $\ln(e(x)) = x\ln(x)$. Næst diffrum við báðar hliðar með margföldunarreglunni:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e(x)} \frac{\mathrm{d}e(x)}{\mathrm{d}x} &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \\
&= \ln(x) + 1.
\end{aligned}$$

Margföldum svo með $e(x)$ og fáum

$$\frac{\mathrm{d}e(x)}{\mathrm{d}x} = e(x)\big(1 + \ln(x)\big) = x^x \big(1 + \ln(x)\big).$$

2.3 Regla l'Hôpitals

Regla l'Hôpitals gerir okkur kleift að reikna nokkur markgildi á þægilegan hátt sem við gætum annars lent í vandræði með. Nánar tiltekið er hægt að nota regluna til að reikna markgildi falla á forminu $\frac{f(x)}{g(x)}$, þegar bæði teljari og nefnari stefna á 0, eða þegar bæði teljari og nefnari stefna á *óendanlegt*.

Setning 2.2. *Regla l'Hôpitals Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil sem inniheldur punktinn a og látum f og g vera föll á I sem eru diffranleg á I nema hugsanlega í a. Gerum ráð fyrir að markgildin*

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

séu bæði til og annað hvort bæði 0 eða bæði ∞. Við gerum einnig þá kröfu að $g'(x) \neq 0$ á I, nema hugsanlega í a. Ef markgildið

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

er til, þá gildir

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Setningin gerir okkur kleift að diffra teljara og nefnara, og meta markgildi f'/g' í staðinn fyrir markgildi f/g. Maður þarf þó að hafa varann á, því skilyrði setningarinnar eru nokkuð flókin! Tökum dæmi:

Dæmi. Útskýrið af hverju við getum ekki notað deilingarregluna til þess að finna markgildið $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ og finnið markgildið með reglu l'Hôpitals.

Lausn. Markgildi teljarans $\lim_{x\to 0} x$ er 0 og því getum við ekki notað deilingarregluna. Bæði markgildin $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ og $\lim_{x\to 0} x = 0$ eru til og eru jöfn 0, svo við prófum að nota reglu l'Hôpitals. Diffrum bæði föllin:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x = 1.$$

Afleiða nefnarans er hvergi 0 og markgildið

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

er til. Því er þetta jafnt markgildinu sem við viljum finna samkvæmt reglunni.

Dæmi. Finnið markgildið $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$.

Lausn. Teljarinn $\ln x$ stefnir á $-\infty$ þegar x stefnir á 0 frá hægri, og nefnarinn $\frac{1}{x}$ stefnir á $+\infty$ þegar $x \to 0^+$. Að auki er nefnarinn hvergi 0. Diffrum teljara og nefnara:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Metum markgildi kvóta afleiðanna:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0.$$

Þar sem markgildið er til, þá ályktum við að $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$.

2.4 Útgildisverkefni

Látum f vera samfellt fall á bili $I \subset \mathbb{R}$. Mjög algengt verkefni er að ákvarða hvar f tekur *útgildi* sín, það er *hágildi* og *lággildi*. Látum $a \in I$. Við segjum að a sé *staðbundinn hágildispunktur* ef til er bil U sem inniheldur a þannig að $f(x) \leq f(a)$ fyrir öll $x \in U$. Við segjum að a sé *víðfeðmur hágildispunktur* ef $f(x) \leq f(a)$ fyrir öll x í formengi f. Við skilgreinum staðbundið og víðfeðmt lággildi á hliðstæðan hátt. Munum að ef bilið I er lokað í báða enda og f er samfellt þá tekur f bæði víðfeðmt hágildi og víðfeðmt lággildi á I. Hægt er að nota afleiðuna til að auðvelda leit að útgildum.

Setning 2.3 (Nauðsynlegt skilyrði fyrir útgildi)**.** *Ef I er opið bil og $a \in I$ er staðbundinn útgildispunktur fallsins f, og f er diffranlegt í a þá er $f'(a) = 0$.*

Við köllum punkta þar sem afleiða fallsins er núll eða ekki til *stöðupunkta fallsins*. **Varúð:** Fall þarf ekki að taka staðbundið útgildi í stöðupunkti sínum (þetta er ekki *nægjanlegt skilyrði* fyrir útgildi). Getur þú fundið dæmi?[2]

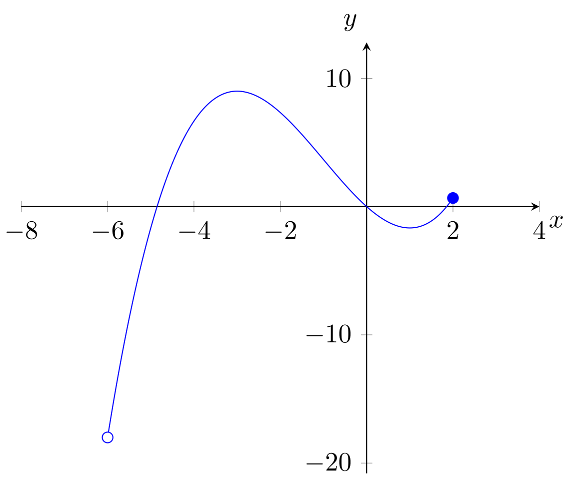
Ef fallið f er skilgreint á *lokuðu bili* þá getur það tekið staðbundin útgildi í stöðupunktunum og í endapunktunum og hvergi annars staðar. Ef fallið er tvisvar sinnum diffranlegt í stöðupunkti þá höfum við próf til þess að ákvarða hvort um hágildi eða lággildi er að ræða.

Setning 2.4 (Útgildispróf með annarri afleiðu)**.** *Látum a vera stöðupunkt fallsins f. Ef f er tvisvar sinnum diffranlegt í a, og $f''(a) < 0$ þá hefur f staðbundið hágildi í a. Ef $f''(a) > 0$ þá hefur f staðbundið lággildi í a. Ef $f''(a) = 0$ þá gefur prófið engar upplýsingar.*

Ef fallið er ekki tvisvar diffranlegt í stöðupunktinum a þá þarf að skoða gildi fallsins sitt hvorum megin við a.

Dæmi. Látum $\mathrm{I} = [-6, 2)$, og $f\colon I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$. Finnið öll staðbundin útgildi, og víðfeðm há- og lággildi ef þau eru til.

Lausn. Þegar útgildisdæmi eru leyst er oft gagnlegt að teikna graf fallsins.



[2]Fallið $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ er diffranlegt með afleiðu $3x^2$ sem er 0 í $x = 0$ en fallið hefur ekki útgildi þar.

Við byrjum á því að athuga að fallið er margliða og því samfellt diffranlegt á I. Við getum því notað öll tólin sem við höfum kynnst. Fyrst diffrum við fallið tvisvar:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 + 2x - 3, \\ f''(x) &= 2x + 2. \end{aligned}$$

Næst finnum við stöðupunkta fallsins sem eru *núllstöðvar* f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)(x+3). \\ f'(x) &= 0 \iff x = 1 \text{ eða } x = -3. \end{aligned}$$

Næst athugum við hvort stöðupunktarnir eru útgildi með því að kanna gildi f'' í punktunum:

$$\begin{aligned} f''(1) = 2 + 2 = 4 > 0 &\implies \text{staðbundið lággildi.} \\ f''(-3) = 2(-3) + 2 = -4 < 0 &\implies \text{staðbundið hágildi.} \end{aligned}$$

Við athugum að endapunkturinn $x = 2$ er líka staðbundinn hágildispunktur, en hinn endapunkturinn $x = -6$ er ekki útgildispunktur því hann er ekki hluti af formenginu. Til þess að ákvarða hvort fallið hafi víðfeðmt hágildi eða lággildi þurfum við að meta gildi þess í stöðupunktunum og endapunktum:

$$f(-6) = -18, \qquad f(3) = 9, \qquad f(1) = -\frac{5}{3}, \qquad f(2) = \frac{2}{3}.$$

Af þessu sjáum við að fallið hefur víðfeðmt hágildi 9 í $x = -3$, staðbundið lággildi $\frac{2}{3}$ í $x = 2$, staðbundið lággildi $-\frac{5}{3}$ í $x = 1$ og ekkert víðfeðmt lággildi (fallið er takmarkað að neðan af -18 en tekur það gildi hvergi).

Dæmi. Kóka-kóla-fyrirtækið ætlar að endurhanna lögun gosdósanna sinna til þess að minnka efniskostnað. Það stendur til að dósirnar verðir sívalningslaga með radíus r og hæð h. Hvernig á að velja radíusinn og hæðina til þess að lágmarka yfirborðsflatarmál dósarinnar A fyrir gefið rúmmál V? Hvaða gildi á r og h fæst fyrir dós með hefðbundnu rúmmáli, $V = 330\,\text{ml}$?

Lausn. Rúmmál sívalnings með radíus r og hæð h er $V = \pi r^2 h$, og flatarmál hans er $A = 2\pi r h + 2 \cdot \pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ (hliðarflötur, toppflötur og botnflötur). Ef við veljum radíus sívalningsins, þá er bara ein tala h möguleg, til þess að rúmmál sívalningsins verði V. Við byrjum því á að leysa jöfnuna $V = \pi r^2 h$ fyrir h til að fækka breytunum um eina:[3]

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Nú ritum við flatarmálið A sem fall af r eingöngu, og finnum útgildispunkta fallsins.

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r \left(r + \frac{V}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}, \\ A'(r) &= 4\pi r - 2\frac{V}{r^2}. \end{aligned}$$

[3]Við gætum líka leyst jöfnuna fyrir r en það er einfaldara að leysa fyrir h í þessu tilfelli.

Finnum mögulega útgildispunkta með því að leysa jöfnuna $A'(r) = 0$ fyrir r:

$$A'(r) = 0 \iff 4\pi r - 2\frac{V}{r^2} = 0 \iff 2\pi r^3 - V = 0.$$

Við endum með $V = \pi r^2 \cdot (2r) = \pi r^2 h$, eða $h = 2r$. Til þess að athuga hvort þetta er staðbundið lággildi eða hágildi diffrum við A aftur:

$$A''(r) = 4\pi + 4\frac{V}{r^3} > 0.$$

Önnur afleiða A er alltaf neikvæð og sér í lagi fyrir $r = \frac{h}{2}$. Við ályktum því að þetta sé staðbundið lággildi. Sannfærið ykkur um að það er einnig víðfeðmt lággildi. Fyrir $330\,\mathrm{ml} = 330\,\mathrm{cm}^3$ dós fæst $r \approx 3{,}74\,\mathrm{cm}$ og $h = 2r \approx 7{,}49\,\mathrm{cm}$.

3 Heildun

3.1 Stofnföll

Látum $I \subset \mathbb{R}$ og $f\colon I \to \mathbb{R}$ vera fall. Við getum spurt okkur „er til fall F þannig að f sé afleiða F, það er $f(x) = F'(x)$"? Ef slíkt fall F er til, þá köllum við það *stofnfall* f, og ritum $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$. Stofnfallið er ekki *ótvírætt ákvarðað*: Við getum alltaf fundið annað stofnfall með því að bæta fasta við fyrra stofnfallið. Jafnframt gildir að ef F og G eru tvö mismunandi stofnföll f þá er mismunurinn $F - G$ fastafall. Við kunnum nú þegar að reikna stofnföll margra falla:

Dæmi. Reiknið stofnföll fallanna:

(a) $f(x) = 3x^3$

(b) $g(x) = e^{2x}$

(c) $h(x) = \sin(x)\cos(x)$

Lausn. Hægt er að finna stofnföllin með hliðsjón af afleiðunum sem við reiknuðum í fyrra dæmi. Venjan er að tákna það að mörg stofnföll eru möguleg með því að skrifa ávallt $F(x) + C$ fyrir stofnfallið, þar sem C stendur fyrir einhverja tölu. Táknum stofnföll f, g og h með F, G og H:

(a) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + C$

(b) $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

(c) $H(x) = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$

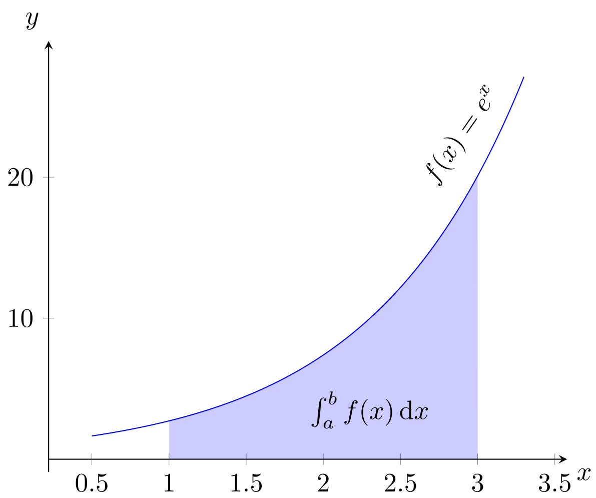
3.2 Heildun — flatarmál undir ferli

Annað algengt vandamál sem fellur undir stærðfræðigreiningu er að finna flatarmálið undir grafi falls, þ.e.a.s. milli grafs fallsins og y-áss. Sú aðgerð kallast *heildun* eða *tegrun*.

Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil og $f\colon I \to \mathbb{R}$ vera fall. Við takmörkum þessa umræðu við samfelld föll þó svo að hægt sé að heilda sum ósamfelld föll. Til þess að finna flatarmálið undir grafi fallsins f á bilinu $(a,b) \subset I$ reiknum við *heildi fallsins f frá a til b*, sem er táknað

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Endapunktar bilsins sem við heildum yfir (a og b) köllum við *heildunarmörkin*. Athugið að þar sem fallið er neikvætt er flatarmálið milli grafs fallsins og y-áss talið sem neikvætt. Rithátturinn er líkur ritháttinum fyrir stofnföll, og það er ekki tilviljun því þessi hugtök eru nátengd.



Dæmi. Reiknið eftirfarandi heildi:

(a) $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ þar sem $f(x) = c$ er fastafall.

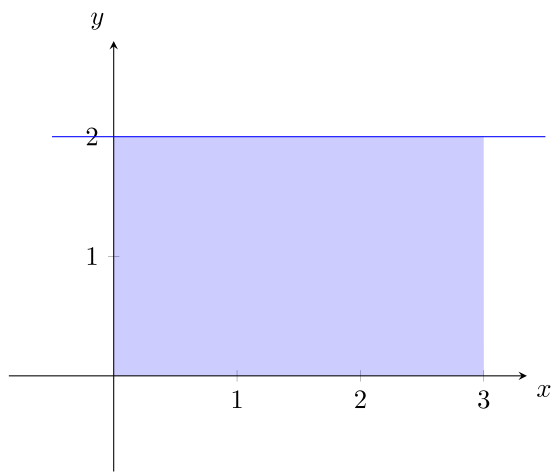
(b) $\int_{-3}^{10} g(x)\,\mathrm{d}x$ þar sem $g(x) = \frac{1}{2}x$.

Lausn. Þar sem gröfin afmarka einföld svæði reiknum við flatarmálið undir þeim með þekktum reglum úr rúmfræði.

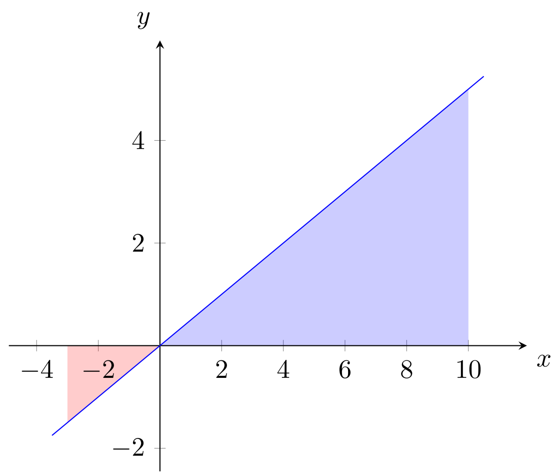
(a) Svæðið undir ferlinum er greinilega rétthyrningur með hliðarlengdir c og 3. Flatarmálið undir grafi fallsins er því $3c$.

(b) Svæðið undir ferlinum samanstendur af tveimur þríhyrningum. Annar þeirra er fyrir ofan y-ás og hefur því jákvætt flatarmál, en hinn er undir y-ás og hefur neikvætt flatarmál. Heildi fallsins frá $x = -3$ til $x = 10$ er summan

$$\int_{-3}^{10} \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = \frac{91}{4}.$$



(a)



(b)

3.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

Þegar við diffrum fall $f\colon I \to \mathbb{R}$ þá erum við að finna hallann á grafi þess í tilteknum punkti, eða *vaxtarhraða fallsins*. Hugsum okkur nú að við skilgreinum annað fall F á eftirfarandi hátt: Veljum einhverja tölu $c \in I$, og látum gildi F í punktinum $x > c$ vera flatarmálið undir grafi f frá c til x:

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Við spyrjum okkur nú hver vaxtarfraði F sé, þ.e. hver sé afleiða F? Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar segir að þetta sé fallið f. Diffrun er því *andhverf aðgerð við heildun*. Áður kom fram að ef stöðufall bifreiðar $s(t)$ er þekkt, þá má finna hraða hennar með því að diffra stöðufallið með tilliti til tíma. Við sjáum nú að ef við þekkjum í staðinn hraða bifreiðarinnar þá getum við — næstum því — endurheimt stöðufallið með því að heilda hraðann með tilliti til tíma. Ég segi næstum því, vegna þess að við getum bætt fasta við stöðufallið án þess að breyta hraðanum. Við þurfum því einnig upplýsingar um upphafsstöðu.

Hér fylgir nákvæm framsetning á undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar, sem varpar ljósi á tengsl heildunar og stofnfalla

Setning 3.1 (Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar)**.**
Setningin er í tveimur hlutum:

1. *Lát $f\colon I \to \mathbb{R}$ vera samfellt á opna bilinu $I = (a, b)$. Látum $F\colon I \to \mathbb{R}$ vera skilgreint með*
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Þá er F diffranlegt á sérhverjum punkti $x \in I$ og $F'(x) = f(x)$.

2. *Lát f vera samfellt fall á I og látum F vera stofnfall f, það er $F'(x) = f(x)$. Látum (c, d) vera hlutbil í I. Þá gildir*
$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c),$$
það er, heildi f yfir (c, d) er mismunur gilda stofnfallsins F í punktunum c og d.

Setningin er mikilvæg fyrir okkur vegna þess að hún segir okkur hvernig maður reiknar heildi: Maður þarf einfaldlega að finna stofnfall! Í ljósi þess köllum við aðfgerðina „að finna stofnfall“ *óákveðna heildun* og notum sama tákn $\int$ og fyrir heildun, en sleppum heildismörkunum.

Dæmi. Reiknið heildið $\int_1^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x$ þar sem $f(x) = \frac{1}{x}$.

Lausn. Við notfærum okkur að stofnfall f' er þekkt — það er nefnilega $f(x) = \frac{1}{x}$. Við fáum því svarið næstum ókeypis:
$$\int_1^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(10) - f(1) = \frac{1}{10} - 1 = -\frac{9}{10}.$$

Dæmi. Reiknið heildið $\int_0^5 e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lausn. Rifjum upp að stofnfall fallsins e^{2x} er $\frac{1}{2}e^{2x} + C$. Því fæst:
$$\int_0^5 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^5 = \frac{1}{2}\left(e^{10} - e^5\right).$$

3.4 Reiknireglur fyrir heildun

Við kunnum nú að heilda föll sem hafa þekkt stofnföll. Okkur vantar verkfæri til þess að finna stofnföll nýrra falla. Vegna samsvörunarinnar sem er milli diffrunar og heildunar, þá fáum við heildunarreglu fyrir hverja diffrunarreglu:

Setning 3.2 (Reiknireglur fyrir heildun)**.**

1. *Stofnfall fallsins* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^r$ *þar sem* $r \in \mathbb{R}$ *er*

$$\int f \,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

.

2. Samlagningarregla: *Látum* f *og* g *vera heildanleg föll á* $I \subset \mathbb{R}$*, og látum* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Þá er fallið* $\alpha f + \beta g$ *heildanlegt og*

$$\int (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}x = \alpha \int f \,\mathrm{d}x + \beta \int g \,\mathrm{d}x.$$

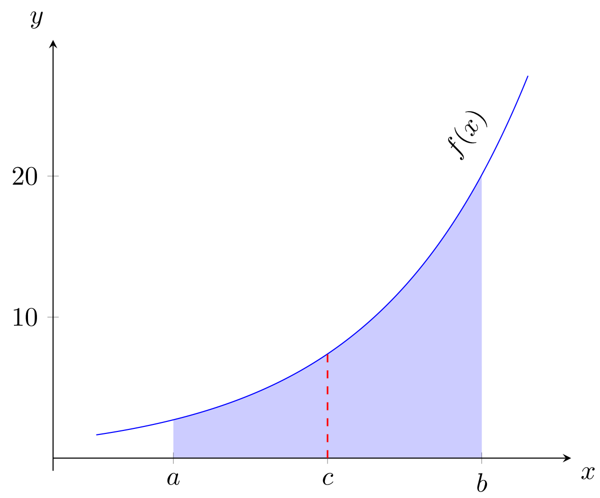
Það er gagnlegt að skilgeina heildið frá b *til* a *þar sem* b *er stærra en* a*, og heildið yfir bilið* $[a, a]$ *sem inniheldur aðeins einn punkt:*

3. $\int_b^a f \,\mathrm{d}x = -\int_a^b f \,\mathrm{d}x,$

4. $\int_a^a f \,\mathrm{d}x = 0.$

Látum $c \in [a, b]$*. Þá getum við skipt bilinu í tvo hluta,* $[a, c]$ *og* $[c, d]$ *og heildað bilin í sitt hvoru lagi:*

5. $$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x.$$



3.5 Innsetningaraðferðin

Hliðstæðan við keðjuregluna í diffrun kallast *innsetningaraðferðin*. Rifjum upp að samkvæmt keðjureglunni gildir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Samsvarandi heildunarregla er

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C$$

og fyrir ákveðin heildi gildir

$$\int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = f(g(b)) - f(g(a)).$$

Reglan er best útskýrð með dæmum:

Dæmi. Heildið fallið $h(x) = 2x \sin(x^2)$ frá $x = 1.0$ til $x = 3.0$.

Lausn. Skilgreinum föllin $f'(x) = \sin x$ og $g(x) = x^2$. Þá er $f(x) = -\cos x$ og $g'(x) = 2x$, svo við fáum

$$\begin{aligned}\int_1^3 \sin(x^2) 2x\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(g(x))\Big|_{x=1}^{x=3} = -\cos(x^2)\Big|_1^3 = -\cos 9 + \cos 1.\end{aligned}$$

Dæmi. Finnið stofnfall fyrir $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, og heildið f yfir bilið $[2, 4]$.

Lausn. Við skulum leysa dæmið á tvo vegu: Í fyrsta lagi með því að finna stofnfall fyrir f með innsetningaraðferðinni, og nota stofnfallið til þess að reikna $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ — í öðru lagi með því að beita innsetningaraðferðinni beint á ákveðna heildið.

- Skilgreinum $u(x) = \ln x$. Þá er $u'(x) = \frac{1}{x}$. Við getum skrifað $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, og við fáum:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln u + C = \ln(\ln x) + C.\end{aligned}$$

  Nú reiknum við ákveðna heildið með

$$\int_2^4 \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln x)\Big|_{x=2}^{x=4} = \ln(\ln 4) - \ln(\ln 2).$$

- Skilgreinum u eins og áður og heildum:

$$\begin{aligned}\int_{x=2}^{x=4} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=2}^{x=4} \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{u=\ln 2}^{u=\ln 4} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln u\Big|_{u=\ln 2}^{u=\ln 4} \ln(\ln 4) - \ln(\ln 2)..\end{aligned}$$

3.6 Hlutheildun

Afleiða margfeldis tveggja falla er gefin með margföldunarreglunni:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Samsvarandi heildunarregla er

$$\int \left(f'g + fg'\right) \mathrm{d}x = \int (fg)' \,\mathrm{d}x = (fg)(x) + C.$$

Það er sjaldgæft að þurfa að heilda fall á forminu $f'g + fg'$. Hins vegar fæst mjög gagnleg jafna með því að umraða liðunum í þessari jöfnu:

$$\int f'g \,\mathrm{d}x = fg - \int fg' \,\mathrm{d}x.$$

Þessi jafna kallast *hlutheildunarformúlan*. Tökum dæmi:

Dæmi. Finnið stofnfall fyrir $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Lausn. Við kunnum að heilda $\frac{1}{x^2}$ og við kunnum að diffra $\ln x$. Við veljum því að skilgreina $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ og $g(x) = \ln x$ þannig að $f(x) = \int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}$ og $g'(x) = \frac{1}{x}$. Hlutheildunarformúlan gefur þá

$$\begin{aligned}
\int \ln x \cdot \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x &= \int f'g \,\mathrm{d}x = (fg)(x) - \int fg' \,\mathrm{d}x \\
&= \ln x \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Dæmi. Finnið stofnfall fyrir $\ln x$.

Lausn. Fallið sem við eigum að heilda virðist ekki vera margfeldi af tveimur liðum. Við getum þó skrifað $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Ef við veljum $f'(x) = 1$ og $g(x) = \ln x$ þá er $f(x) = x$ og $g'(x) = \frac{1}{x}$. Við notum hlutheildum og fáum

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x = x \ln x - x.$$

3.7 Heildun ræðra falla með stofnbrotaliðun

Þegar finna á stofnfall fyrir fall á forminu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ þar sem $P(x)$ og $Q(x)$ eru margliður, til dæmis

$$\frac{3x+1}{x^2+x}$$

þá þarf yfirleitt að nota stofnbrotaliðun (ein undantekning er þegar teljarinn er afleiða nefnarans, $Q'(x) = P(x)$ — þá er hægt að nota innsetningu). Markmiðið er að einfalda fallið svo það sé summa af liðum á forminu $\frac{1}{x+a}$, og nota

$$\int \frac{1}{x+a} \,\mathrm{d}x = \ln|x+a| + C.$$

Dæmi. Finnið stofnfall fyrir eftirfarandi föll:

(a) $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x}$

(b) $g(x) = \frac{1+x^2}{(x+3)(x+5)(x+7)}$

Lausn. Við notum stofnbrotaliðun:

(a) Við getum þáttað nefnarann í $x(x+1)$. Til eru tölur A og B þannig að

$$\frac{3x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}.$$

Til þess að jafnan gildi verða teljari og nefnari að vera jafnir. Því verður að gilda:

$$3x+1 = A(x+1)+Bx = (A+B)x + A.$$

Berum saman stuðla og fáum $A+B=3$ og $A=1$. Þá er $B=2$, og við fáum fall sem við getum heildað:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{1}{x+1}.$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + 2\ln|x+1| + C.$$

(b) Við beitum nákvæmlega sömu aðferð. Til eru tölur A, B og C þannig að

$$\frac{1+x^2}{(x+3)(x+5)(x+7)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x+7}.$$

Margföldum báðar hliðar með nefnaranum og fáum

$$\begin{aligned} 1+x^2 &= A(x+5)(x+7) + B(x+3)(x+7) + C(x+3)(x+5) \\ &= (A+B+C)x^2 + (12A+10B+8C)x + (35A+21B+15C). \end{aligned}$$

Berum saman stuðla og fáum jöfnuhneppið:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 12A + 10B + 8C = 0 \\ 35A + 21B + 15C = 1 \end{cases}$$

Við eftirlátum lesendanum að staðfesta að lausnin er

$$A = \frac{5}{4}, \quad B = -\frac{13}{2}, \quad C = \frac{25}{4}$$

svo

$$g(x) = \frac{5}{4}\frac{1}{x+3} - \frac{13}{2}\frac{1}{x+5} + \frac{25}{4}\frac{1}{x+7}.$$

Stofnfallið fæst með því að heilda lið fyrir lið:

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\ln|x+3| - \frac{13}{2}\ln|x+5| + \frac{25}{4}\ln|x+7|.$$