INNGANGUR AÐ STÆRÐFRÆÐIGREININGU

Pétur Rafn Bryde

8. ágúst 2015

Verkfræði- og raunvísindasvið Háskóla Íslands

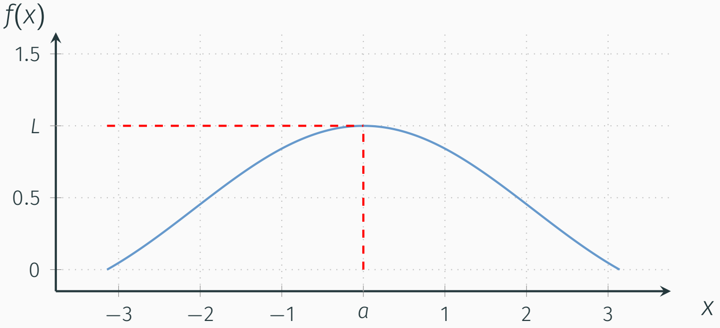
INNGANGUR

Þessar glærur og tilheyrandi nótur voru samdar fyrir fyrirlestur sem haldinn var fyrir nýnema Verkfræði- og raunvísindasviðs Háskóla Íslands þann 7. ágúst 2015. Efni fyrirlestursins eru undirstöðuatriði í stærðfræðigreiningu, það er markgildi, samfelldni, diffrun og heildun, sem fjallað er um með hæfilegri stærðfræðilegri rökfestu. Lögð er áhersla á að byggja upp innsæi og taka lýsandi dæmi.

Allar ábendingar um það sem betur mætti fara eru vel þegnar. Vinsamlegast sendið þær til `prb1@hi.is`.

MARKGILDI OG SAMFELLDNI

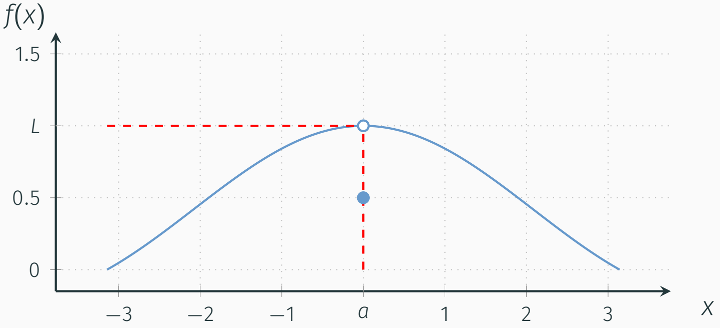
Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil[1] sem inniheldur a og látum f vera fall á I. Hvað þýðir það að $f(x)$ *stefni á L* þegar x nálgast a?



Fallið $f(x)$ stefnir á L þegar x stefnir á a.

[1] Í þessum fyrirlestri og tilheyrandi nótum táknar I alltaf bil. Bilið I getur verið opið, lokað eða hvorugt, nema annað sé tekið fram.

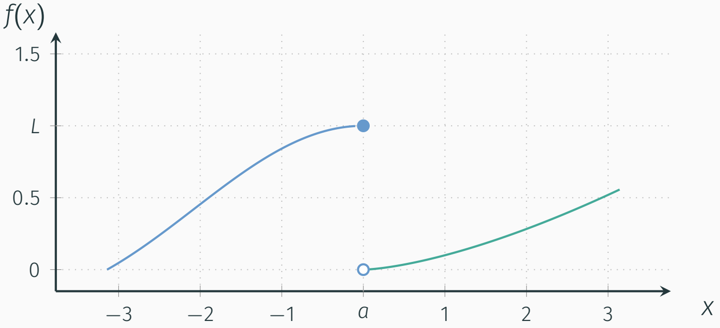
Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil[1] sem inniheldur a og látum f vera fall á I. Hvað þýðir það að $f(x)$ *stefni á* L þegar x nálgast a?



Fallið stefnir ennþá á L óháð gildi f í a.

[1] Í þessum fyrirlestri og tilheyrandi nótum táknar I alltaf bil. Bilið I getur verið opið, lokað eða hvorugt, nema annað sé tekið fram.

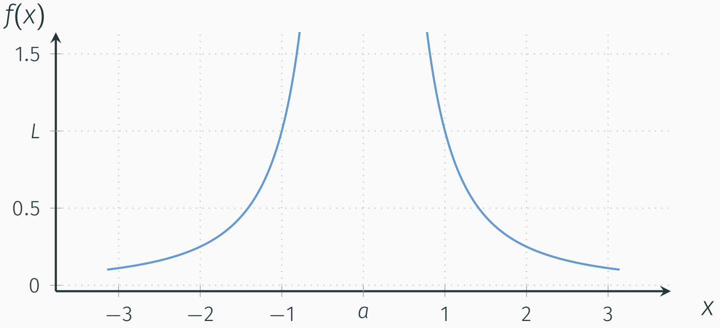
Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil[1] sem inniheldur a og látum f vera fall á I. Hvað þýðir það að $f(x)$ *stefni á* L þegar x nálgast a?



Fallið f *hefur ekkert markgildi í* a.

[1] Í þessum fyrirlestri og tilheyrandi nótum táknar I alltaf bil. Bilið I getur verið opið, lokað eða hvorugt, nema annað sé tekið fram.

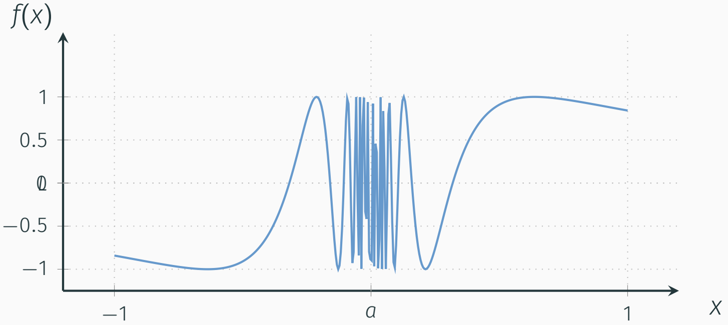
Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil[1] sem inniheldur a og látum f vera fall á I. Hvað þýðir það að $f(x)$ *stefni á* L þegar x nálgast a?



Fallið f *hefur ekkert markgildi* í a.

[1] Í þessum fyrirlestri og tilheyrandi nótum táknar I alltaf bil. Bilið I getur verið opið, lokað eða hvorugt, nema annað sé tekið fram.

Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil[1] sem inniheldur a og látum f vera fall á I. Hvað þýðir það að $f(x)$ *stefni á L* þegar x nálgast a?



Fallið f *hefur ekkert markgildi í a.*

[1] Í þessum fyrirlestri og tilheyrandi nótum táknar I alltaf bil. Bilið I getur verið opið, lokað eða hvorugt, nema annað sé tekið fram.

Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil[1] sem inniheldur a og látum f vera fall á I. Hvað þýðir það að $f(x)$ *stefni á L* þegar x nálgast a?

Við þurfum að skilgreina þessa hugmynd nákvæmlega.

[1] Í þessum fyrirlestri og tilheyrandi nótum táknar I alltaf bil. Bilið I getur verið opið, lokað eða hvorugt, nema annað sé tekið fram.

Skilgreining

Við segjum að $f(x)$ hafi markgildið L þegar x stefnir á a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ef að fyrir sérhverja jákvæða tölu $\epsilon > 0$ má finna jákvæða tölu $\delta > 0$ þannig að fyrir öll x á bilinu $(a - \delta, a + \delta)$ nema hugsanlega a þá er munurinn milli $f(x)$ og L minni en ϵ:

$$\text{ef } 0 < |x - a| < \delta, \text{ þá er } \left|f(x) - L\right| < \epsilon.$$

Ef það er ekki til neitt L sem uppfyllir þetta skilyrði þá segjum við að markgildið sé ekki til, eða að f hafi ekki markgildi í punktinum a.

Fallið f hefur ekki markgildi í punktinum a ef

- fallið tekur stökk í a,
- fallið vex eða minnkar ótakmarkað í a,
- fallið sveiflast of ört í a.

Þegar fallið vex eða minnkar ótakmarkað í punktinum a segjum við að það *stefni á óendanlegt*. Við ritum stundum $f(x) \to \infty$ eða $f(x) \to -\infty$.

Dæmi

Látum $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Sýnið að f hafi markgildið 0 þegar $x \to 0$.

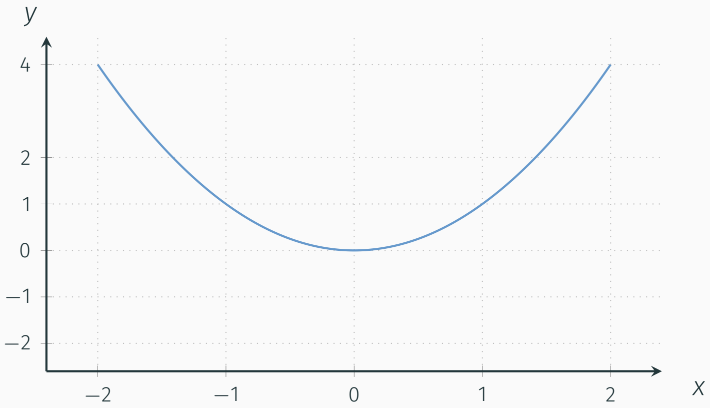
Dæmi

Látum $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Sýnið að f hafi markgildið 0 þegar $x \to 0$.

Við þurfum að finna δ til þess að tryggja að $\left|f(x)\right| < \epsilon$ ef $0 < |x| < \delta$.

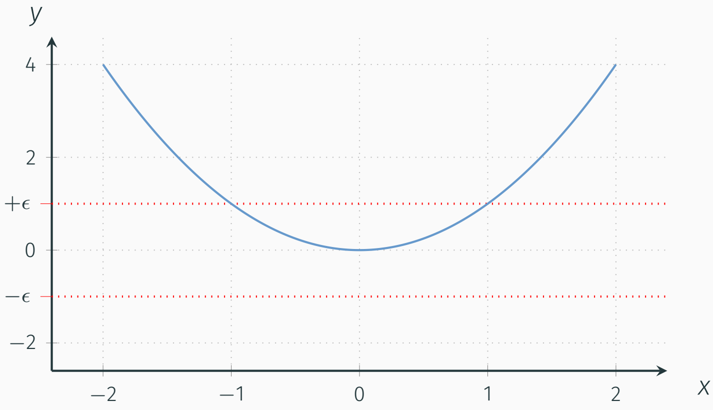
Dæmi

Við þurfum að finna δ til þess að tryggja að $\left|f(x)\right| < \epsilon$ ef $0 < |x| < \delta$.



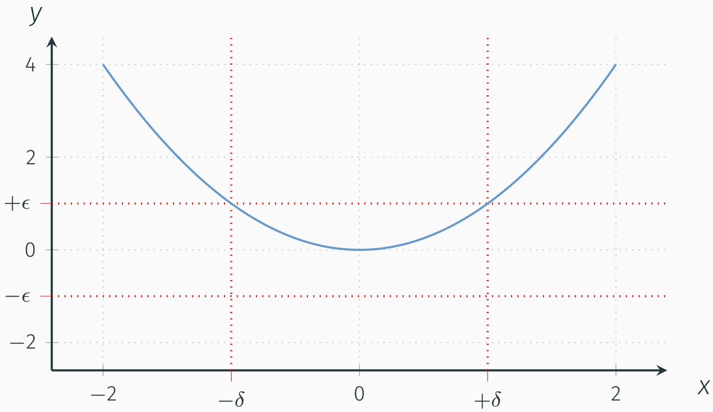
Dæmi

Við þurfum að finna δ til þess að tryggja að $\left|f(x)\right| < \epsilon$ ef $0 < |x| < \delta$.



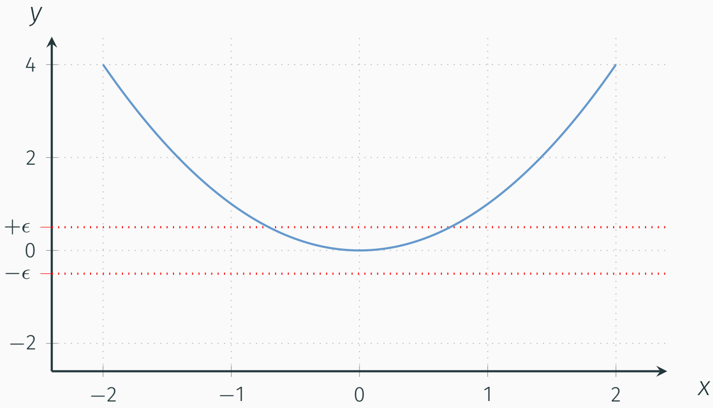
Dæmi

Við þurfum að finna δ til þess að tryggja að $\left|f(x)\right| < \epsilon$ ef $0 < |x| < \delta$.



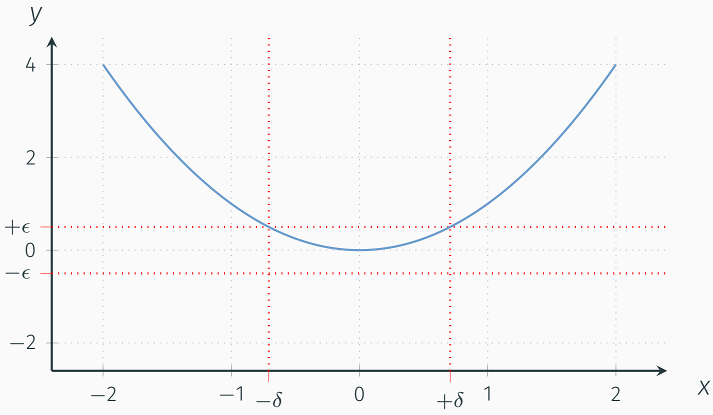
Dæmi

Við þurfum að finna δ til þess að tryggja að $\left|f(x)\right| < \epsilon$ ef $0 < |x| < \delta$.



Dæmi

Við þurfum að finna δ til þess að tryggja að $\left|f(x)\right| < \epsilon$ ef $0 < |x| < \delta$.



Dæmi

Við þurfum að finna δ til þess að tryggja að $\left|f(x)\right| < \epsilon$ ef $0 < |x| < \delta$.

Prófum að velja $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Því þá fæst fyrir $|x| < \delta$:

$$\left|f(x)\right| < \left|f(\delta)\right| = \delta^2 = \epsilon.$$

Fallið f hefur *vinstra markgildið* L, eða stefnir á L þegar x stefnir á a *frá vinstri*,

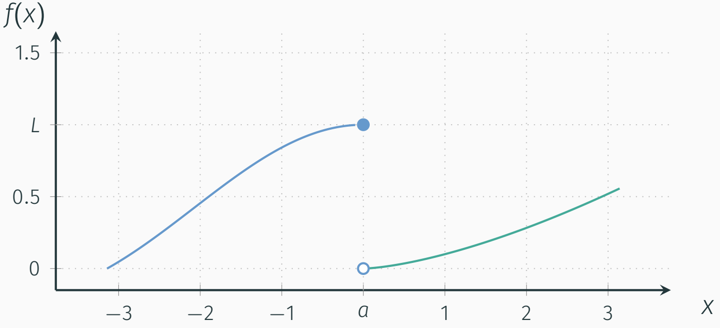
$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

ef til er δ þannig að $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ fyrir öll $x \in (a - \delta, a)$.

Við skilgreinum *hægra markgildið* á hliðstæðan hátt.

Ef að fallið f hefur bæði vinstra og hægra markgildi í a, *og markgildin tvö eru jöfn*, þá hefur fallið markgildi í a — annars ekki.

VINSTRA OG HÆGRA MARKGILDI



Vinstra markgildi f er ekki jafnt hægra markgildi í $x = a$.

HVERNIG LEYSUM VIÐ MARKGILDISVERKEFNI?

Markgildisverkefni skiptast í tvo hluta:

1. Finnum tölu L sem gæti verið markgildið eða sannfærumst um að markgildið sé ekki til. Hér hjálpar að teikna fallið!
2. *Sönnum* að L sé markgildi fallsins eða að markgildið sé ekki til. Notum *epsilon-delta-sönnun* eða *markgildisreglur* (sem er auðveldara).

Notum epsilon-delta-sannanir aðallega til að sannna markgildisreglur.

Dæmi

Látum f og g vera tvö raunföll á $\mathbb{R}$. Gerum ráð fyrir að $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Sýnið að þá gildir summureglan:[2]

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L + M.$$

[2]Lausnir við flestum sýnidæmum er að finna í fyrirlestrarnótunum

Látum f og g vera raunföll á $I \subset \mathbb{R}$ sem inniheldur a. Ef $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$ þá gildir:

1. *Samlagningarregla:*

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = L \pm M.$$

2. *Margföldunarregla:*

$$\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = L \cdot M.$$

Látum f og g vera raunföll á $I \subset \mathbb{R}$ sem inniheldur a. Ef $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$ þá gildir:

3. *Deilingarregla:*

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}, \quad \text{ef } M \neq 0.$$

4. *Veldisregla:* Ef $m, n \in \mathbb{N}$ þá gildir:

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)\right)^{(m/n)} = L^{m/n}.$$

Ef n er slétt þá verður L að vera jákvætt, og ef $m < 0$ þá má L ekki vera 0.

Dæmi

Reiknið eftirfarandi markgildi, eða *útskýrið* af hverju það er ekki til:

(a)

$$\lim_{x \to 3} \frac{5x^2 - 8x - 13}{x^2 - 5}$$

(b)

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$$

(c)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{(x - 1)^2}$$

Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil sem inniheldur a og látum f, g og h vera föll á $\mathbb{R}$ þannig að $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ fyrir öll $x \in I$ nema hugsanlega a. Gefum okkur að $lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$. Þá gildir

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Dæmi

Finnið markgildi fallsins $S(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ í punktinum 0.

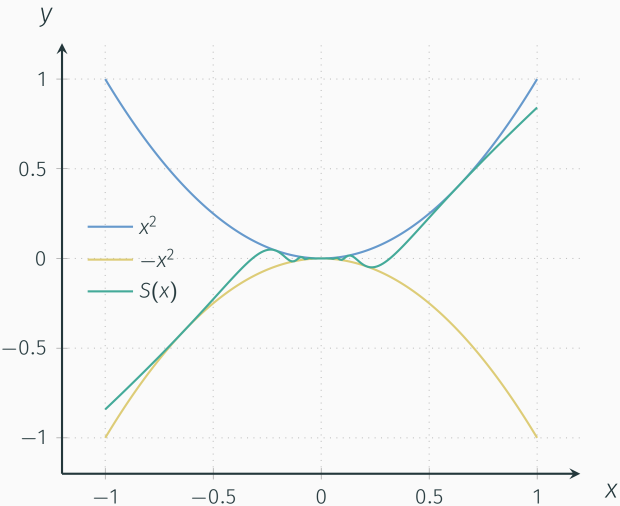
Dæmi

Finnið markgildi fallsins $S(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ í punktinum 0.

Ábending: Notið klemmuregluna með $f(x) = -x^2$ og $h(x) = x^2$.

Dæmi

Finnið markgildi fallsins $S(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ í punktinum 0.



DÆMAPÁSA

Reiknið eftirfarandi markgildi, eða *útskýrið* af hverju þau eru ekki til:

1.1. $\lim_{x\to 3} x^3$

1.2. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1}$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$

3. Gefið er að $\lim_{x\to 3} f(x) = 30$ og $\lim_{x\to 3} g(x) = 2$. Hvað er $\lim_{x\to 3} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$?
4. Skilgreinum fallið $f(x)$ með

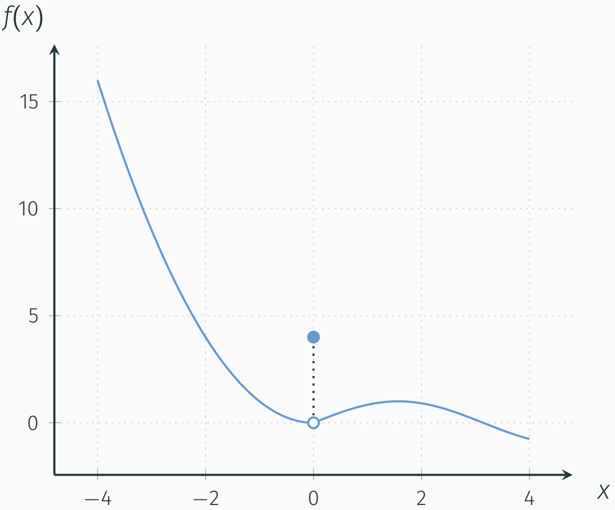
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{ef } x \leq 0 \\ e^x & \text{ef } x > 0. \end{cases}$$

Finnið markgildið $\lim_{x\to 0} f(x)$. *Ábending:* Teiknið graf fallsins. Getið þið notað klemmuregluna?

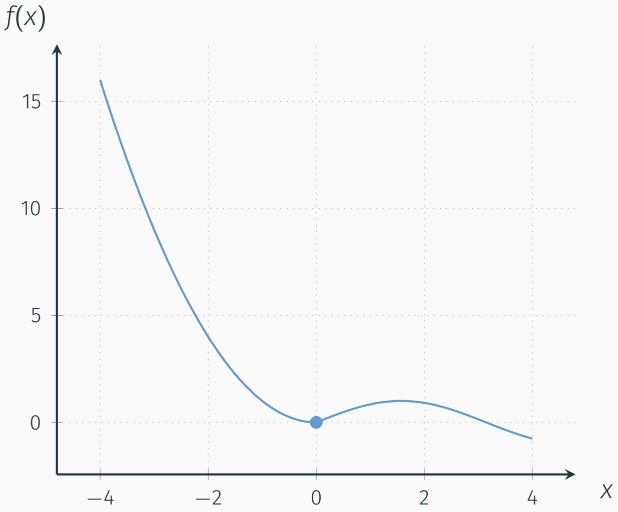
Skilgreining

Ef fallið f hefur markgildi í a og $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, þá segjum við að fallið sé *samfellt* í punktinum a.

Samfelldni er eitt af lykilhugtökum stærðfræðigreiningarinnar.



Fallið hefur markgildi í punktinum 0 en er ekki samfellt.



Fallið hefur markgildi og er samfellt í punktinum 0.

Látum f og g vera raunföll á bili I og samfelld í punktinum $a \in I$. þá gildir:

1. Fallið $f + g$ er samfellt í a.
2. Fallið $f \cdot g$ er samfellt í a.
3. Fallið $\frac{f}{g}$ er samfellt í a ef $g(a) \neq 0$.
4. Látum nú $f(a) = y$ og látum fallið h vera samfellt í y. Þá er fallið $h \circ f$ gefið með $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ samfellt í a.

Af þessum reglum leiðir að *margliður eru samfelldar alls staðar á* $\mathbb{R}$, og *ræð föll eru samfelld þar sem nefnarinn er ekki* 0.

Fall sem er samfellt á öllu skilgreiningarmengi sínu köllum við *samfellt*. Mengi samfelldra falla á bilinu I táknum við með $\mathcal{C}(I)$. Nokkur mikilvæg dæmi um samfelld föll eru exp, ln, cos og sin.

Samfelld föll hafa marga æskilega eiginleika. Þau eru til dæmis *heildanleg*, og þau taka *hæsta og lægsta gildi* á sérhverju lokuðu bili. Þau uppfylla einnig milligildissetningu: Ef $f\colon I \to \mathbb{R}$ er samfellt á lokaða bilinu $I = [a, b]$ þá tekur f öll gildi milli $f(a)$ og $f(b)$.

Ef f er samfellt þá getum við fundið markgildi f í hvaða punkti sem er með því að „stinga inn í formúluna“ fyrir f.

Hvar eru eftirfarandi föll samfelld?

1.1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$
1.2. $g\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x+1}{x-1}$
1.3. $h(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \sin(e^x - 1)$
1.4. $j(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ j(x) = \left(\sin(e^x - 1) + x^2\right)^3$

Reiknið eftirfarandi markgildi:

2.1. $\lim_{x\to 1} x^{27} + 3x^5 - 3$
2.2. $\lim_{x\to 0} j(x)$ þar sem j er fallið úr dæmi 1.4.

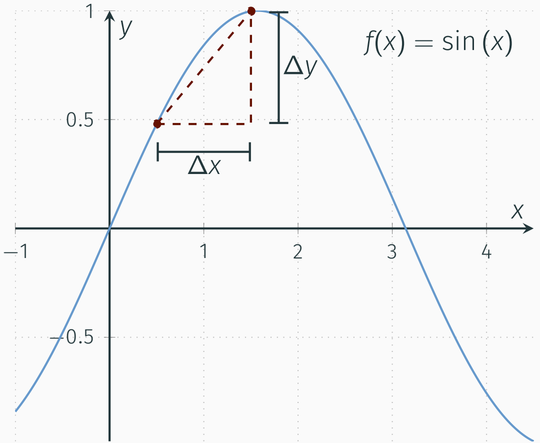
DIFFRUN

Oft vill maður lýsa því hverstu hratt eitthvað breytist, t.d. hversu hratt bifreið hreyfist.

Diffrun var fundin upp af Newton og Leibniz á 17. öld til þess að leysa þetta vandamál.

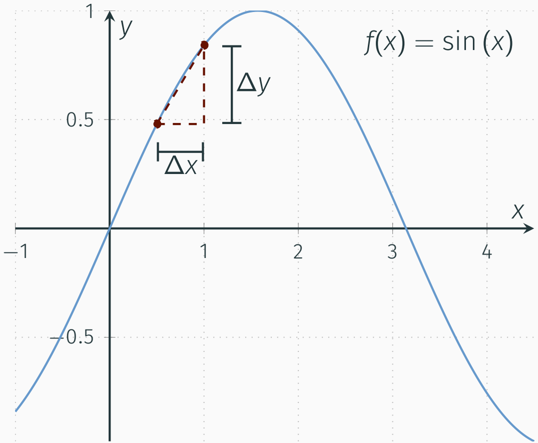
Lykilhugmyndin er að reikna út *halla snertils* við graf falls.

Látum $f\colon I \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall og látum $a \in I$. Graf fallsins f sker þá punktinn $(a, f(a))$. Við viljum finna *snertil* við graf fallsins í punktinum $(a, f(a))$, ef hann er til. Ef það er hægt, þá köllum við halla snertilsins *afleiðu* fallsins í a.



Mat á afleiðu sin með mismunakvóta.

MAT Á AFLEIÐU MEÐ MISMUNAKVÓTA



Mat á afleiðu sin með mismunakvóta.

Skilgreining

Ef markgildið

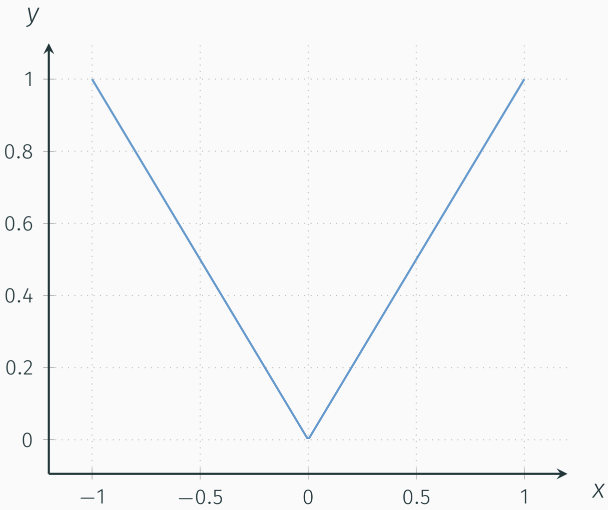
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

er til, þá segjum við að f sé diffranlegt í a með afleiðu L. Við táknum afleiðu f í punktinum a með $f'(a)$ (lesið *eff merkt*) eða $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$.

Til þess að fall f hafi afleiðu í punkti a þá þarf f að vera samfellt í f (*nauðsynlegt skilyrði*). Það er er ekki nægjanlegt skilyrði: Til eru samfelld föll sem eru ekki diffranleg, t.d. ef halli þeirra breytist of ört.

Dæmi

Hvar er fallið $g(x) = |x|$ diffranlegt?



Við kynntum afleiðuna til sögunnar sem hallann á grafi falls. Ef við diffrum stöðu $s(t)$ með tilliti til tíma t þá fáum við hraða $v(t)$. Almennt segir afleiða falls til um hversu hratt það breytist.

Ef fallið $f\colon I \to \mathbb{R}$ er diffranlegt alls staðar á formengi sínu þá segjum við að f sé *diffranlegt*. Við getum skilgreint nýtt fall

$$f'\colon I \to \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ef fallið f' er samfellt segjum við að f sé samfellt diffranlegt. Við táknum mengi samfellt diffranlegra falla með $\mathcal{C}^1(I)$.

Ef $f \in \mathcal{C}^1(I)$ þá er ef til vill hægt að diffra það aftur. Fallið sem þá fæst köllum við *aðra afleiðu* f, táknað með f'' (*eff tvímerkt*).

Dæmi

Reiknið afleiðu fallsins $f(x) = x^2$ í punktinum $x = 3$ með því að nota skilgreiningu afleiðunnar. Finnið einnig fallið f'.

Það er tímafrekt að reikna afleiður með skilgreiningunni. Við notum hana helst til þess að *sanna reglur*.

1. Fastafallið $x \mapsto c$ þar sem $c \in \mathbb{R}$ er alls staðar diffranlegt með afleiðu 0.
2. Afleiða fallsins $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^r$ þar sem $r \in \mathbb{R}$ er $f'(x) = rx^{r-1}$ *hvar sem þetta fall er skilgreint.*[3]

[3] Sem dæmi þá er $g(x) = x^2$ alls staðar diffranlegt með afleiðu $g'(x) = 2x$ en fallið $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ er aðeins diffranlegt þar sem $x > 0$ og þar er afleiðan $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Látum f og g vera diffranleg föll á $I \subset \mathbb{R}$. Þá eru föllin $f + g$, $f \cdot g$, og αf (þar sem $\alpha \in \mathbb{R}$) diffranleg á I. Fallið $\frac{f}{g}$ er diffranlegt í þeim punktum x þar sem $g(x) \neq 0$.

3. *Samlagningarregla:*

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(\alpha f)' = \alpha f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

4. *Margföldunarregla:*

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

5. *Deilingarregla:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x &= e^x, & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x &= \ln(a) a^x, \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) &= \frac{1}{x}, & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a(x) &= \frac{1}{x \ln(a)}, \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) &= \cos(x), & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(x) &= -\sin(x), \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh(x) &= \cosh(x), & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh(x) &= \sinh(x).
\end{aligned}
$$

Dæmi

Reiknið afleiður eftirfarandi falla:

(a) $a(x) = 3x^2 - x + 5$

(b) $b(x) = x^2 e^x$

(c) $c(x) = \sin(x)\sinh(x)$

(d) $d(x) = \tan(x)$

Síðast en ekki síst:

6. *Keðjuregla:*
$$(f \circ h)'(a) = f'(h(a)) \cdot h'(a).$$

Dæmi

Reiknið afleiður eftirfarandi falla:

(a) $a(x) = \sin(x)$

(b) $b(x) = \left(sin(x)\right)^2$

(c) $c(x) = \exp\left(\left(sin(x)\right)^2\right)$

Finnið afleiður eftirfarandi falla:

1. $f(x) = x^3 + 2x + 1$
2. $g(x) = \ln(x)e^x$
3. $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$
4. $a(x) = x^2$.
5. $b(x) = e^{x^2}$
6. $c(x) = \sin\left(e^{x^2}\right)$

Regla l'Hôpitals gerir okkur kleift að reikna sum markgildi á þægilegan hátt. Hana er hægt að nota fyrir föll á forminu $\frac{f(x)}{g(x)}$ þegar:

- bæði teljari og nefnari stefna á 0, eða
- bæði teljari og nefnari stefna á $+\infty$ eða $-\infty$.

Hún felst í því að diffra teljara og nefnara og finna markgildið $\frac{f'}{g'}$ í staðinn.

Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil sem inniheldur punktinn a og látum f og g vera föll á I sem eru diffranleg á I nema hugsanlega í a. Gerum ráð fyrir að markgildin

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

séu bæði til og annað hvort bæði 0 eða bæði $\pm\infty$.

Ef markgildið

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

er til, þá gildir

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dæmi (1)

Útskýrið af hverju við getum ekki notað deilingarregluna til þess að finna markgildið $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ og finnið markgildið með reglu l'Hôpitals.

Dæmi (2)

Finnið markgildið $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$.

Útgildisverkefni snúast um að finna hæsta eða lægsta mögulega gildi á einhverju falli.

Útgildisverkefni finnast sennilega í *öllum greinum* verkfræði og raunvísinda. Alls staðar þar sem maður vill lágmarka kostnað eða hámarka gróða kemur útgildisverkefni við sögu.

Látum f vera samfellt fall á bili $I \subset \mathbb{R}$. Látum $a \in I$. Við segjum að a sé *staðbundinn hágildispunktur* ef til er bil U sem inniheldur a þannig að $f(x) \leq f(a)$ fyrir öll $x \in U$. Það er, $f(x)$ er hvergi stærra en í a á bilinu U. Við köllum gildið $f(a)$ staðbundið hágildi.

Við segjum að a sé *víðfeðmur hágildispunktur* ef $f(x) \leq f(a)$ fyrir öll x í formengi f. Það er, $f(x)$ er hvergi stærra en $f(a)$. Við köllum gildið $f(a)$ víðfeðmt hágildi, eða bara hágildi.

Við skilgreinum staðbundið lággildi og víðfeðmt lággildi á hliðstæðan hátt. Orðið *útgildi* er samheiti fyrir hágildi og lággildi.

Munið: Ef f er samfellt og I er *lokað* þá tekur f bæði víðfeðmt hágildi og lággildi á I.

Setning (Nauðsynlegt skilyrði fyrir útgildi)

Ef I er opið bil og $a \in I$ er staðbundinn útgildispunktur fallsins f, og f er diffranlegt í a þá er $f'(a) = 0$.

Við köllum punkta þar sem afleiða fallsins er núll eða ekki til *stöðupunkta fallsins*.

Setning (Nauðsynlegt skilyrði fyrir útgildi)

Ef I er opið bil og $a \in I$ er staðbundinn útgildispunktur fallsins f, og f er diffranlegt í a þá er $f'(a) = 0$.

Við köllum punkta þar sem afleiða fallsins er núll eða ekki til *stöðupunkta fallsins*.

Varúð: Fall þarf ekki að taka staðbundið útgildi í öllum stöðupunktum sínum (þetta er ekki *nægjanlegt skilyrði* fyrir útgildi). Getur þú fundið dæmi?[3]

[3] Fallið $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ er diffranlegt með afleiðu $3x^2$ sem er 0 í $x = 0$ en fallið hefur ekki útgildi þar.

Setning (Nauðsynlegt skilyrði fyrir útgildi)

Ef I er opið bil og $a \in I$ er staðbundinn útgildispunktur fallsins f, og f er diffranlegt í a þá er $f'(a) = 0$.

Við köllum punkta þar sem afleiða fallsins er núll eða ekki til *stöðupunkta fallsins*.

Ef fallið f er skilgreint á *lokuðu bili* þá getur það tekið staðbundin útgildi í stöðupunktunum og í endapunktunum og hvergi annars staðar.

Ef fallið er tvisvar sinnum diffranlegt í stöðupunkti þá höfum við próf til þess að ákvarða hvort um hágildi eða lággildi er að ræða:

Setning (Útgildispróf með annarri afleiðu)

Látum a vera stöðupunkt fallsins f. Ef f er tvisvar sinnum diffranlegt í a, þá gildir:

- *Ef $f''(a) < 0$ þá hefur f staðbundið hágildi í a.*
- *Ef $f''(a) > 0$ þá hefur f staðbundið lággildi í a.*
- *Ef $f''(a) = 0$ þá gefur prófið engar upplýsingar.*

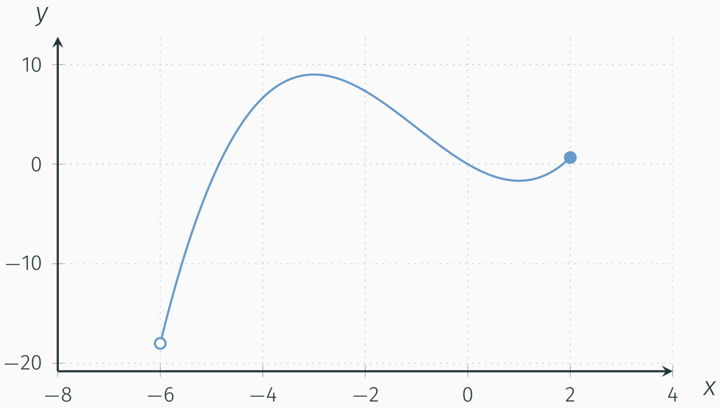
Ef $f''(a) = 0$ eða fallið er ekki tvisvar diffranlegt í stöðupunktinum a þá þarf að skoða gildi fallsins sitt hvorum megin við a.

Dæmi

Látum I = $]-6,2]$, og $f\colon I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$. Finnið öll staðbundin útgildi, og víðfeðm há- og lággildi ef þau eru til.

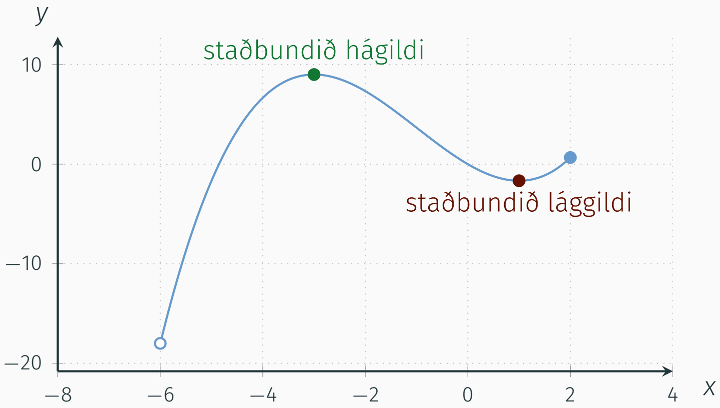
Dæmi

Látum I = $]-6,2]$, og $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$. Finnið öll staðbundin útgildi, og víðfeðm há- og lággildi ef þau eru til.



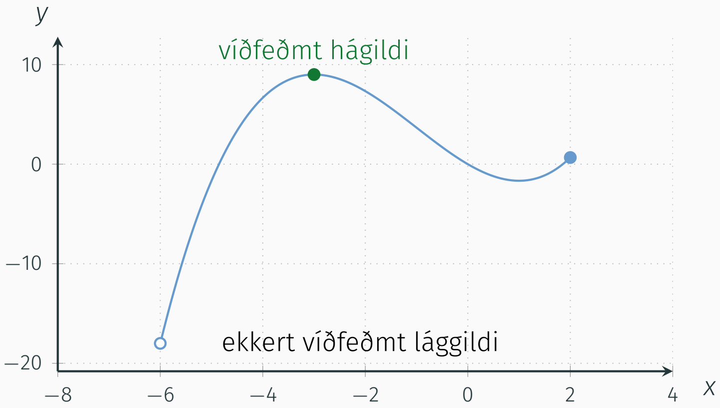
Dæmi

Látum I = $]-6,2]$, og $f\colon I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$. Finnið öll staðbundin útgildi, og víðfeðm há- og lággildi ef þau eru til.



Dæmi

Látum I = $]-6,2]$, og $f\colon I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x.$ Finnið öll staðbundin útgildi, og víðfeðm há- og lággildi ef þau eru til.



Dæmi

Kóka-kóla-fyrirtækið ætlar að endurhanna lögun gosdósanna sinna til þess að minnka efniskostnað. Það stendur til að dósirnar verðir sívalningslaga með radíus r og hæð h. Hvernig á að velja radíusinn og hæðina til þess að lágmarka yfirborðsflatarmál dósarinnar A fyrir gefið rúmmál V? Hvaða gildi á r og h fæst fyrir dós með hefðbundnu rúmmáli, $V = 330\,\mathrm{ml}$?

Finnið öll staðbundna útgildispunkta fallanna á bilinu sem gefið er. Tilgreinið víðfeðm hágildi og lággildi ef þau eru til.

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ á bilinu $[-3, 0]$.
2. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ á bilinu $]-2, 2]$.
3. $h(x) = e^x - x$ á bilinu $[-1, 2]$.

HEILDUN

Látum $I \subset \mathbb{R}$ og $f\colon I \to \mathbb{R}$ vera fall. Við getum spurt okkur „er til fall F þannig að f sé afleiða F, það er $f(x) = F'(x)$“? Ef slíkt fall F er til, þá köllum við það *stofnfall* f, og ritum $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Stofnfallið er ekki *ótvírætt ákvarðað*: Við getum alltaf fundið annað stofnfall með því að bæta fasta við fyrra stofnfallið. Jafnframt gildir að ef F og G eru tvö mismunandi stofnföll f þá er mismunurinn $F - G$ fastafall.

Að finna stofnfall er andhverf aðgerð við að finna afleiðu. Þess vegna kunnum við þegar að finna stofnföll margra falla.

Dæmi

Reiknið stofnföll fallanna:

(a) $f(x) = 3x^3$

(b) $g(x) = e^{2x}$

(c) $h(x) = \sin(x)\cos(x)$

Annað algengt vandamál í stærðfræðigreiningu er að finna flatarmál undir grafi falls (milli grafs og y-áss). Við köllum þessa aðgerð *heildun* eða *tegrun*. Heildun er almennt notuð þegar það þarf að leggja saman áhrifin vegna margra smárra breytinga.

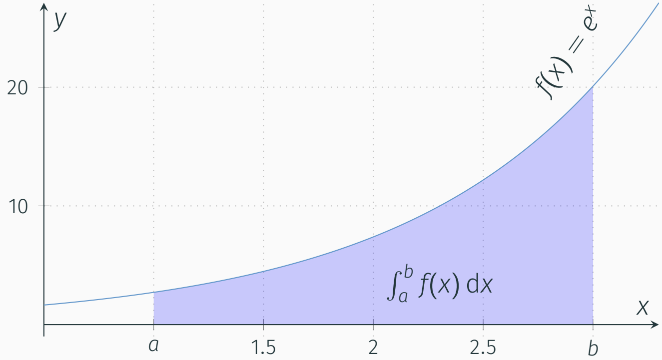
Flatarmálið undir grafi fallsins f á bilinu $(a, b) \subset I$ er *heildi fallsins f frá a til b*, sem er táknað

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Endapunktar bilsins sem við heildum yfir (a og b) kallast *heildunarmörk*.

Þar sem fallið er neikvætt er flatarmálið milli grafs fallsins og y-áss talið sem neikvætt.

HEILDUN — FLATARMÁL UNDIR FERLI



Dæmi

Reiknið eftirfarandi heildi:

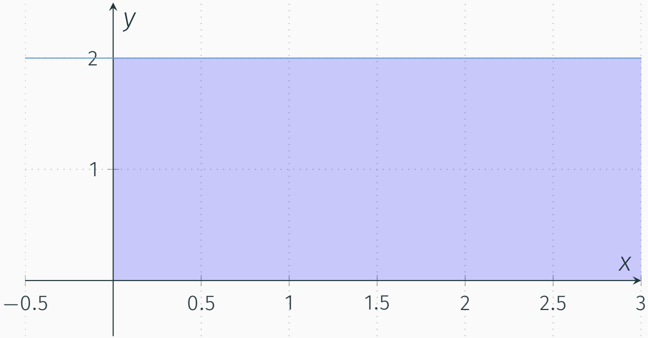
(a) $\int_0^3 f(x)\,dx$ þar sem $f(x) = c$ er fastafall.

(b) $\int_{-3}^{10} g(x)\,dx$ þar sem $g(x) = \frac{1}{2}x$.

Dæmi

Reiknið eftirfarandi heildi:

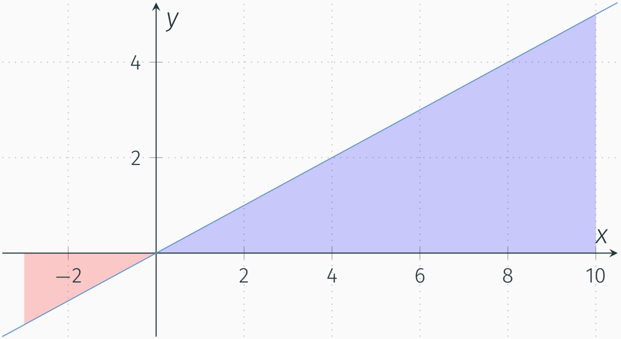
(a) $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ þar sem $f(x) = c$ er fastafall.



Dæmi

Reiknið eftirfarandi heildi:

(b) $\int_{-3}^{10} g(x)\,\mathrm{d}x$ þar sem $g(x) = \frac{1}{2}x$.



Finnið stofnföll fyrir eftirfarandi föll:

1.1. $\sin(x)$
1.2. $\cos(x)$
1.3. $\frac{1}{\cos x^2}$.
1.4. $x^2 + 2x$

2. Skilgreinum fallið $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ með $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Reiknið heildið
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$
með flatarmálsskilgreiningunni. *Ábending:* Teiknið graf fallsins.

Þegar við diffrum fall $f\colon I \to \mathbb{R}$ þá finnum við hallann á grafi f í sérhverjum punkti, eða *vaxtarhraða fallsins*.

Skilgreinum annað fall F á eftirfarandi hátt: Veljum tölu $c \in I$, og látum gildi F í punktinum $x > c$ vera flatarmálið undir grafi f frá c til x:

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Hver er vaxtarhraði fallsins F, það er F'?

Þegar við diffrum fall $f\colon I \to \mathbb{R}$ þá finnum við hallann á grafi f í sérhverjum punkti, eða *vaxtarhraða fallsins*.

Skilgreinum annað fall F á eftirfarandi hátt: Veljum tölu $c \in I$, og látum gildi F í punktinum $x > c$ vera flatarmálið undir grafi f frá c til x:

$$F(x) = \int_c^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Hver er vaxtarhraði fallsins F, það er F'?

Samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar er $F' = f$. Diffrun er *andhverf aðgerð* við heildun.

TÚLKUN

Látum $s(t)$ vera staðsetningu bíls sem fall af tíma. Við finnum hraða bílsins á tímapunkti t_a með því að reikna afleiðuna:

$$v(t_a) = s'(t_a).$$

Ef við byrjum með hraðafallið $v(t)$ getum við reiknað út stöðufallið með því að heilda:

$$s(t_a) = \int_{t=0}^{t=t_a} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Setning (Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar)

Setningin er í tveimur hlutum:

1. *Lát* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *vera samfellt á opna bilinu* $I = (a, b)$. *Látum* $F\colon I \to \mathbb{R}$ *vera skilgreint með*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Þá er F *diffranlegt á sérhverjum punkti* $x \in I$ *og* $F'(x) = f(x)$.

Setning (Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar)

Setningin er í tveimur hlutum:

2. *Lát f vera samfellt fall á I og látum F vera stofnfall f, það er $F'(x) = f(x)$. Látum (c, d) vera hlutbil í I. Þá gildir*

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c),$$

það er, heildi f yfir (c, d) er mismunur gilda stofnfallsins F í punktunum c og d.

Setning (Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar)

Setningin segir okkur að við getum reiknað heildi með því að finna stofnföll.

Dæmi (1)

Reiknið heildið $\int_1^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x$ þar sem $f(x) = \frac{1}{x}$.

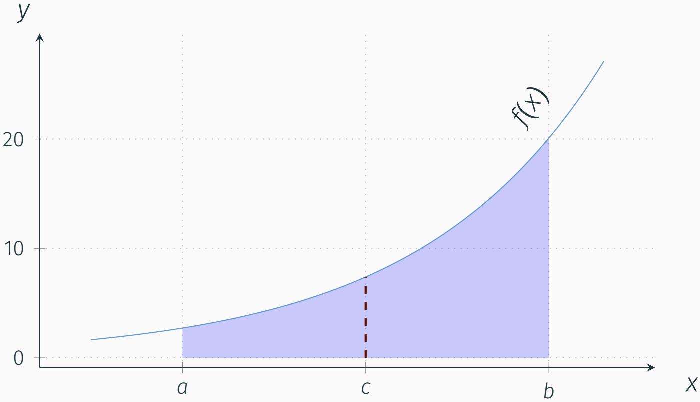
Dæmi (2)

Reiknið heildið $\int_0^5 e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

1. Stofnfall fallsins $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^r$ þar sem $r \in \mathbb{R}$ er
$$\int f \,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$
.
2. *Samlagningarregla:* Látum f og g vera heildanleg föll á $I \subset \mathbb{R}$, og látum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Þá er fallið $\alpha f + \beta g$ heildanlegt og
$$\int (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}x = \alpha \int f \,\mathrm{d}x + \beta \int g \,\mathrm{d}x.$$
3. *Skipt um heildunarstefnu:*
$$\int_b^a f \,\mathrm{d}x = -\int_a^b f \,\mathrm{d}x.$$
4. *Heildun yfir eins punkts bil:*
$$\int_a^a f \,\mathrm{d}x = 0.$$

5. *Bili skipt í tvennt:*

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx.$$



Reiknið út eftirfarandi heildi:

1.1.
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

1.2.
$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

1.3.
$$\int_0 \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cos x^2}$$

1.4.
$$\int_{10}^{15} x^2 + 2x\,\mathrm{d}x$$

Reiknið eftirfarandi heildi:

2.
$$\int_1^{e} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Hliðstæðan við keðjuregluna í diffrun kallast *innsetningaraðferðin*. Samkvæmt keðjureglunni gildir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Samsvarandi heildunarregla er

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C$$

og fyrir ákveðin heildi gildir

$$\int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = f(g(b)) - f(g(a)).$$

Dæmi (1)

Heildið fallið $h(x) = 2x \sin(x^2)$ frá $x = 1.0$ til $x = 3.0$.

Dæmi (2)

Finnið stofnfall fyrir $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, og heildið f yfir bilið $[2, 4]$.

Finnið stofnföll fyrir eftirfarandi föll, og reiknið heildi þeirra yfir gefið bil I.

1.1. $f(x) = 2xe^{x^2}$ og $I = [1, 2]$.
1.2. $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ og $I = [1, e]$.
1.3. $h(x) = \sin\left(\cos(x)\right)\sin(x)$ og $I = [0, \pi]$.
1.4. $j(x) = x\cos\left(x^2\right)$ og $I = [-1, 1]$.

Afleiða margfeldis tveggja falla er gefin með margföldunarreglunni:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Samsvarandi heildunarregla er

$$\int (f'g + fg')\,\mathrm{d}x = \int (fg)'\,\mathrm{d}x = (fg)(x) + C.$$

Það er sjaldgæft að þurfa að heilda fall á forminu $f'g + fg'$. Við fáum gagnlega jöfnu með því að umraða liðunum:

$$\int f'g\,\mathrm{d}x = fg - \int fg'\,\mathrm{d}x.$$

Þessi jafna kallast *hlutheildunarformúlan*.

Dæmi (1)

Finnið stofnfall fyrir $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Dæmi (2)

Finnið stofnfall fyrir $\ln x$.

1. Finnið stofnfall fyrir $f(x) = x\cos(x)$.
2. Reiknið heildið
$$\int_0^1 xe^x \, dx.$$

Þegar finna á stofnfall fyrir fall á forminu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ þar sem $P(x)$ og $Q(x)$ eru margliður, til dæmis

$$\frac{3x+1}{x^2+x}$$

þá þarf yfirleitt að nota stofnbrotaliðun (ein undantekning er þegar teljarinn er afleiða nefnarans, $Q'(x) = P(x)$ — þá er hægt að nota innsetningu). Markmiðið er að einfalda fallið svo það sé summa af liðum á forminu $\frac{1}{x+a}$, og nota

$$\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x = \ln|x+a| + C.$$

Dæmi

Finnið stofnfall fyrir eftirfarandi föll:

(a) $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x}$

(b) $g(x) = \frac{1+x^2}{(x+3)(x+5)(x+7)}$

1. Reiknið óákveðna heildið
$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x.$$
Ábending: Þarf að nota stofnbrotaliðun?
2. Reiknið óákveðna heildið
$$\int_0^1 \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x.$$

Takk fyrir okkur ☺